

Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2002

PRÁCTICA 0

CONJUNTOS BIEN ORDENDADOS

- (1) **Teorema (Principio general de definición recursiva).** Sea J un conjunto bien ordenado con primer elemento α_0 . Sea C un conjunto. Sea \mathcal{F} el conjunto de todas las funciones con dominio alguna sección de J y codominio C (incluyendo la función vacía $\emptyset : S_{\alpha_0} \rightarrow C$). Sea $\rho : \mathcal{F} \rightarrow C$ una función. Entonces existe una única función $h : J \rightarrow C$ tal que

$$(*) \quad h(\alpha) = \rho(h|_{S_\alpha})$$

para todo $\alpha \in J$.

- (a) Probar que si h, k son dos funciones definidas en todo J o en una sección de J y verifican $(*)$ para todo α en sus respectivos dominios, entonces $h(\alpha) = k(\alpha)$ para todo α en ambos dominios.
- (b) Probar que si existe $h : S_\alpha \rightarrow C$ que verifica $(*)$, entonces existe $k : S_\alpha \cup \{\alpha\} \rightarrow C$ que verifica $(*)$.
- (c) Probar que si $K \subset J$ y para todo $\alpha \in K$ existe una función $h_\alpha : S_\alpha \rightarrow C$ que verifica $(*)$, entonces existe una función

$$k : \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \rightarrow C$$

que verifica $(*)$.

- (d) Probar, por inducción transfinita, que para todo $\beta \in J$, existe una función $h_\beta : S_\beta \rightarrow C$ que verifica $(*)$. (Sugerencia: Si β tiene un predecesor inmediato α , entonces $S_\beta = S_\alpha \cup \{\alpha\}$. Si no, S_β es la unión de todos los S_α con $\alpha < \beta$.)
- (e) Probar el teorema.
- (2) (a) Sean J, E conjuntos bien ordenados, y $h : J \rightarrow E$. Probar que son equivalentes:
- (i) h preserva el orden y es suryectiva o su imagen es una sección de E .
- (ii) $h(\alpha) = \min[E \setminus h(S_\alpha)]$ para todo $\alpha \in J$.
- (Sugerencia: probar primero que cada una de las propiedades implica que $h(S_\alpha)$ es una sección de E , y que esta tiene que ser la sección por $h(\alpha)$.)
- (b) Si E es un conjunto bien ordenado probar que el tipo de orden de una sección de E es distinto del tipo de orden de E , y que dos secciones distintas de E tienen tipos de orden distintos. (Sugerencia: dado J , existe a lo suma una aplicación que preserve el orden de J en E cuya imagen es E o una sección de E .)

- (3) Sean J, E conjuntos bien ordenados y sea $k : J \rightarrow E$ que preserve el orden. Entonces el tipo de orden de J es el de E o el de una sección de E . (Sugerencia: elegir $e_0 \in E$. Definir $h : J \rightarrow E$ mediante la recursión

$$h(\alpha) = \min(E \setminus h(S_\alpha)) \text{ si } h(S_\alpha) \neq E$$

y $h(\alpha) = e_0$ en caso contrario. Demostrar que $h(\alpha) \leq k(\alpha)$ para todo $\alpha \in J$; concluir que $h(S_\alpha) \neq E$ para todo $\alpha \in J$.)

- (4) Probar lo siguiente:
- (a) Si A y B son conjuntos bien ordenados, entonces se verifica exactamente una de las siguientes tres condiciones: A y B tienen el mismo tipo de orden, o A tiene el tipo de orden de una sección de B , o B tiene el tipo de orden de una sección de A . (Sugerencia: construir un conjunto bien ordenado que contenga a A y a B y usar el ejercicio anterior).
- (b) Supongamos que A y B son dos conjuntos bien ordenados no numerables, tales que toda sección de A y B es numerable. Entonces A y B tienen el mismo tipo de orden.
- (5) Sean X un conjunto y \mathcal{A} la familia de todos los pares $(A, <)$, donde A es un subconjunto de X y $<$ es un buen orden de A . Definimos

$$(A, <) \prec (A', <')$$

si $(A, <)$ es igual a una sección de $(A', <')$.

- (a) Demostrar que \prec es un orden parcial sobre \mathcal{A} .

- (b) Sea \mathcal{B} una subfamilia de \mathcal{A} totalmente ordenada por \prec . Definimos B' como la unión de los conjuntos B para todo $(B, <) \in \mathcal{B}$; y definimos $<'$ como la unión de las relaciones $<$, para todo $(B, <) \in \mathcal{B}$. Demostrar que $(B', <')$ es un conjunto bien ordenado.

- (6) Usando los ejercicios 1–5 demostrar el

Teorema: El principio del máximo es equivalente al teorema del buen orden.

- (7) Usando los ejercicios 1–5 demostrar el

Teorema: El axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden.

Demostración. Sean X un conjunto y c una función de elección fijada para los subconjuntos no vacíos de X . Si T es un subconjunto de X y $<$ es una relación sobre T , decimos que $(T, <)$ es una torre en X si $<$ es un buen orden de T y si para cada $x \in T$,

$$x = c(X - S_x(T)),$$

donde $S_x(T)$ es la sección por de T por x .

- (a) Sean $(T_1, <_1)$ y $(T_2, <_2)$ dos torres en X . Demostrar que estos dos conjuntos ordenados son el mismo o uno es una sección del otro. (Sugerencia: supongamos que $h : T_1 \rightarrow T_2$ preserva el orden y $h(T_1)$ es igual a T_2 o a una sección de T_2 . Probar que entonces $h(x) = x$ para todo $x \in T_1$.)
- (b) Si $(T, <)$ es una torre en X y $T \neq X$, demostrar que existe una torre en X de la cual $(T, <)$ es una sección.
- (c) Sea $\{(T_k, <_k) : k \in K\}$ la familia de todas las torres de X . Sean

$$T = \bigcup_{k \in K} T_k \quad \text{y} \quad < = \bigcup_{k \in K} (<_k).$$

Demostrar que $(T, <)$ es una torre en X . Concluir que $T = X$.

- (8) Usando los ejercicios 1–4 construir un conjunto bien ordenado no numerable.

Sea \mathcal{A} el conjunto de pares $(A, <)$ donde $A \subset \mathbb{N}$ y $<$ es un buen orden en A (el conjunto vacío, con el buen orden vacío pertenece a \mathcal{A}). Se define una relación de equivalencia \sim en \mathcal{A} de la siguiente manera

$$(A, <) \sim (A', <') \iff (A, <) \text{ y } (A', <') \text{ tienen el mismo tipo de orden.}$$

Sea $[(A, <)]$ la clase de equivalencia de $(A, <)$; sea E el conjunto de las clases de equivalencia. Se define

$$[(A, <)] \ll [(A', <')]$$

si $(A, <)$ tiene el tipo de orden de una sección de $(A', <')$.

- (a) Probar que \ll define un orden en E , con primer elemento $[(\emptyset, \emptyset)]$.
- (b) Probar que si $\alpha = [(A, <)] \in E$, entonces $(A, <)$ tiene el mismo tipo de orden que S_α . (Sugerencia: definir $f : A \rightarrow S_\alpha$ por $f(x) = [(A_x, <_{A_x})]$.)
- (c) Deducir que (E, \ll) es bien ordenado.
- (d) Mostrar que E es no numerable. (Sugerencia: si $h : E \rightarrow \mathbb{N}$ es una biyección, entonces h induce un buen orden en \mathbb{N} .)
- (e) Mostrar que todas las secciones de E son numerables. Por lo tanto E es el único conjunto bien ordenado no numerable cuyas secciones son todas numerables (salvo isomorfismos de conjuntos ordenados).

Observación: Se puede usar el mismo procedimiento para, dado X un conjunto bien ordenado, construir un conjunto bien ordenado de mayor cardinal.