

Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2002

PRÁCTICA 1

Bases y sub-bases de topologías

- (1) Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de topologías en X .
 - (a) Probar que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X . ¿Es $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ una topología en X ?
 - (b) Probar que existe una única topología en X que es la menor de todas las topologías que contienen a todas las topologías \mathcal{T}_α ($\alpha \in A$), y una única topología en X que es la mayor de todas las topologías contenidas en cada una de las topologías \mathcal{T}_α ($\alpha \in A$).
 - (c) Si $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ y $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, encontrar las topologías mencionadas en (b).
- (2) Probar que si \mathcal{B} es base de una topología en X , entonces la topología generada por \mathcal{B} es igual a la intersección de todas las topologías que contienen a \mathcal{B} . Probar que vale lo mismo si \mathcal{B} es una sub-base.
- (3) Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Sea $\mathcal{S} = \{S_x : x \in X\}$ y sea $\mathcal{R} = \{R_x : x \in X\}$, donde $R_x = \{y \in X : x < y\}$. Probar que $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ son una sub-base para la topología del orden en X .

- (4) Considerar las siguientes colecciones de subconjuntos de \mathbb{R} :

$$\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a < b\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a < b\},$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(a, b] : a < b\},$$

$$\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_1\}, \text{ donde } K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}, \text{ donde } (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}, \text{ donde } (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\},$$

$$\mathcal{B}_7 = \{B : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}.$$

- (a) Probar que cada \mathcal{B}_i es una base para una topología en \mathbb{R} .

Notación: Notaremos \mathbb{R}_l al espacio topológico \mathbb{R} con la topología definida por \mathcal{B}_2 .

- (b) Comparar las siete topologías entre sí.

- (c) Probar que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una sub-base que genera la misma topología que \mathcal{B}_1 .

- (5) **Topología definida por filtro de entornos.** Supongamos que tenemos para cada $x \in X$ un subconjunto (no vacío) $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades:

E1: Dado $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in A$.

E2: Dado $B \subset A$, $B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \in \mathcal{F}_x$.

E3: Dados $A, B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$.

E4: Dado $A \in \mathcal{F}_x$, existe $B \subset A$ tal que $B \in \mathcal{F}_x$, y $B \in \mathcal{F}_y$ para cada $y \in B$.

Probar:

- (a) $\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{F}_x \forall x \in B\} \cup \emptyset$ es una topología en X (observar que no se necesita la propiedad E4). Esta topología se llama la topología definida por los filtros de entornos de sus puntos.

- (b) Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, los conjuntos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : x \in U \subset A \text{ para algún } U \in \mathcal{T}\}$$

verifican los axiomas E1-E4. Los conjuntos \mathcal{F}_x se llaman filtros de entornos del punto x .

- (c) El filtro de entornos de una topología definida por filtro de entornos coincide con éste.

- (d) Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, la topología definida por los filtros de entornos de X coincide con \mathcal{T} .

- (6) **Topologías definidas por operador de clausura.**

Un operador $\bar{(\cdot)} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ que verifica las siguientes propiedades:

C1: $\bar{\emptyset} = \emptyset$,

$$C2: A \subseteq \overline{A}, \forall A \in \mathcal{P}(X),$$

$$C3: \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \forall A \in \mathcal{P}(X),$$

$$C4: \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \forall A, B \in \mathcal{P}(X),$$

se llama un operador de clausura.

(a) Probar que si se tiene un operador de clausura, se tiene en X una topología definida por

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overline{X \setminus U} = X \setminus U.$$

Observación: Lo que estamos haciendo es definir la topología por sus cerrados, esto es,

$$F \text{ es cerrado} \iff \overline{F} = F.$$

(b) Probar que si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supseteq A} F \quad \text{donde } F \text{ es cerrado}$$

define un operador de clausura.

(c) Probar que si se parte de un operador clausura en un espacio X y se construye una topología como en (a), el operador clausura definido a partir de esta topología (como en (b)) es el original.

(d) Probar que si se parte de un espacio topológico X y se define un operador clausura como en (b), la topología definida a partir de este operador (como en (a)) es la original de X .

(7) Probar que si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \forall U \in \mathcal{T}, x \in U\}$$

define un operador de clausura. Probar que para todo $A \subseteq X$ se tiene

$$\{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \forall U \in \mathcal{T}, x \in U\} = \bigcap_{F \supseteq A} F \quad (\text{donde } F \text{ es cerrado})$$

(8) Probar que $\bigcup_{\alpha} \overline{A_{\alpha}} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}$ y mostrar que la inclusión puede ser estricta.

(9) Decidir cuáles de las siguientes igualdades son ciertas, y en caso de ser falsas determinar si se verifica alguna de las inclusiones.

$$(a) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

$$(b) \overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}.$$

$$(c) \overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}.$$

(10) Considerar el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes subconjuntos de X .

$$A = \{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{(x, 0) : 0 < x < 1\},$$

$$D = \{(x, 1/2) : 0 < x < 1\},$$

$$E = \{(1/2, y) : 0 < y < 1\}.$$

(11) Considerar las siete topologías definidas en el ejercicio 4. Determinar la clausura del conjunto $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ en cada una de las topologías.

Redes

(12) Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Probar que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

R1: Si $(x_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$ converge a la constante.

R2: Si $(x_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x , entonces toda sub-red de $(x_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .

R3: Si $(x_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x , entonces $(x_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x .

R4: Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_{α} un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^{\alpha})_{k \in \Gamma_{\alpha}}$, que converge a $x^{\alpha} \in X$, y además $(x^{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$ converge a $x \in X$.

Consideremos $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha \in \Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \iff k \geq k' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta \in \Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$ converge a x .

- (13) Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Probar que la fórmula

$$\bar{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq A, \text{ y } x_\alpha \rightarrow x\}$$

define un operador de clausura. Probar que la clausura usual coincide con la recién definida.

- (14) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathcal{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ . Probar que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ que converge a x (para la ida, considerar Γ el conjunto de pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$, U entorno abierto de x que contiene a x_α , con el orden $(\alpha, U) \preceq (\beta, V)$ si $\alpha \leq \beta$ y $V \subseteq U$).

Funciones Continuas.

- (15) Sean X, Y espacios topológicos. Probar que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \rightarrow Y$ es equivalente a pedir que f sea continua
- (a) Para todo $x \in X$, y para todo $A \in \mathcal{F}_y$ ($y = f(x)$) existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $f(B) \subseteq A$.
 - (b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \rightarrow x$, se tiene que $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$.
 - (c) Para todo $A \subseteq X$, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
 - (d) Si \mathcal{B} es una base para la topología de Y , $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.
 - (e) Si \mathcal{S} es una sub-base para la topología de Y , $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

- (16) Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Sea $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica de E , esto es,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Probar que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E (la frontera de E es $\bar{E} \cap \overline{(X \setminus E)}$).

- (17) (a) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Si $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.
- (b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es un homeomorfismo.
- (c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Probar que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

- (18) Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas.
- (a) Probar que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X .
- (b) Sea $h : X \rightarrow Y$ la función

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Probar que h es continua.

- (19) Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio topológico X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \rightarrow Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.
- (a) Probar que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.
 - (b) Probar que si \mathcal{A} es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.
 - (c) Encontrar un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.
 - (d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α . Mostrar que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

(20) **Topología de Zariski en k^n (tener en mente $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$).**

Consideremos el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k , $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$. Para cada subconjunto $S \subseteq k[x]$ definimos el conjunto algebraico dado por S como

$$V(S) = \{(z_1, \dots, z_n) \in k^n : p(z_1, \dots, z_n) = 0 \forall p \in S\}.$$

Verificar las siguientes propiedades

(a) Si $S \subseteq T \subseteq k[x]$, entonces $V(S) \supseteq V(T)$.

(b) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S .

(c) $V(\{0\}) = k^n$, y $V(\{1\}) = \emptyset$.

(d) Si $I, J \subseteq k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

(e) Si $\{I_a\}_{a \in A}$ es una familia de ideales, entonces $V(\bigcup_{a \in A} I_a) = \bigcap_{a \in A} V(I_a)$.

Observación: los items (c), (d), (e) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la topología de Zariski de k^n .

(f) Los conjuntos $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$ forman una base para dicha topología.

(g) Los abiertos D_f son densos si f es no nulo.

(21) Caracterizar la topología de Zariski de k . Compararla con la usual en el caso en que $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$.

(22) Comparar la topología de Zariski en k^2 con la topología usual de k^2 ($k = \mathbb{R}$, ó $k = \mathbb{C}$).

Topologías dadas por una métrica

(23) Sea X un conjunto, y sea d una métrica en X . Probar que la topología inducida por d es la mínima con la propiedad que la función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

(24) Mostrar que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden del diccionario es metrizable (i.e. existe una métrica tal que la topología que induce la métrica coincide con la dada).

(25) Sea \mathbb{R}^ω el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en \mathbb{R}^ω la topología uniforme de la siguiente manera:

Primero se define en \mathbb{R} la métrica acotada $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$ (nota: induce la misma topología que la usual). Luego se define en \mathbb{R}^ω la métrica uniforme como $d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_n \{\bar{d}(a_n, b_n)\}$.

(a) Verificar que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.

(b) Decidir si las siguientes funciones \mathbb{R} en \mathbb{R}^ω son continuas tomando en \mathbb{R} la topología usual, y en \mathbb{R}^ω la topología uniforme.

$$\begin{aligned} f(t) &= (t, 2t, 3t, \dots), \\ g(t) &= (t, t, t, \dots), \\ h(t) &= (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \dots). \end{aligned}$$

(c) Decidir si las siguientes sucesiones convergen en \mathbb{R}^ω con la topología uniforme.

$$\begin{array}{cccc} w_1 = (1, 1, 1, 1, \dots), & x_1 = (1, 1, 1, 1, \dots), & y_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), & z_1 = (1, 1, 0, 0, \dots), \\ w_2 = (0, 2, 2, 2, \dots), & x_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots), & y_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), & z_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), \\ w_3 = (0, 0, 3, 3, \dots), & x_3 = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots), & y_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots), & z_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

(d) Calcular la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a la topología uniforme de \mathbb{R}^ω .