Topología

Segundo Cuatrimestre 2002

Práctica 2

Topología subespacio.

(1) Sea X un espacio topológico, $Y \subset X$ un subconjunto e $i : Y \to X$ la inclusión. Probar que la topología del subespacio de Y está caracterizada por la siguiente propiedad:

"Para todo espacio topológico Z y toda función $f : Z \to Y$, se tiene que f es continua si y sólo si $i \circ f : Z \to X$ lo es."

(O sea, probar que la topología del subespacio en Y es la única topología que se puede poner en Y de manera que valga la propiedad anterior.)

(2) Probar que si Z es un subespacio de X, y A es un subconjunto de Z, entonces la topología de A como subespacio de Y coincide con la topología de A como subespacio de X.

(3) Consideremos a $Y = [-1, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en Y? ¿Cuáles son abiertos en $\mathbb{R}$?

$A = \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\}$,
$B = \{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$,
$C = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\}$,
$D = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$,
$E = \{x : 0 < |x| < 1 \wedge 1/x \notin \mathbb{N}\}$.

(4) Sea X ordenado, con la topología del orden, y sea $Y \subset X$ un subconjunto. En Y se puede considerar la topología que hereda como subespacio de X, y la topología del orden (ya que Y es ordenado, por el mismo orden que X). Comparar estas dos topologías.

Topología Producto de dos espacios. Salvo que se especifique otra cosa la topología en un producto $X \times Y$ de dos espacios topológicos es la producto.

(5) Sean X, Y espacios topológicos. Probar que $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son abiertas.

(6) Probar que la topología del orden del diccionario en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}_d$ es la topología discreta en $\mathbb{R}$. Comparar con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

(7) Sea $\mathbb{R}_l$ la topología cuya base de abiertos son los conjuntos de la forma $[a, b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Sea L una recta en el plano. Describir la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

(8) Sea I el subespacio $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$. Comparar la topología producto en $I \times I$ con la topología del orden del diccionario en $I \times I$ y con la topología $I_d \times I$ donde I_d denota a I con la topología discreta.

(9) Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluir que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y, entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.

(10) Probar que el producto de espacios Hausdorff es Hausdorff, y que un subespacio de un espacio Hausdorff es Hausdorff.

(11) Probar que X es Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.

(12) (a) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Probar que las funciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son inmersiones (i.e. definen un homeomorfismo con su imagen).

(b) Sea X un espacio con una distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Probar que la topología inducida por la métrica es la mínima tal que d es continua. (Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.)

(13) (a) Sean X, Y espacios toplógicos, y sea $f : X \to Y$ continua. Se dice que f es un homeomorfismo local si se verifica alguna de las siguientes propiedades equivalentes:

(i) Para cada $x \in X$, existen $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ tales que $x \in U$, $f(x) \in V$ y $f|_U : U \to V$ es un homeomorfismo.

(ii) Primero: para cada $U \subseteq X$ abierto y $\forall\ x \in U$, existe $V \subseteq Y$ abierto tal que $f(x) \in V$ y $V \subseteq f(U)$. Y segundo: para cada $x \in X$ existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ y $f|_U$ es inyectiva.

(iii) Primero: f es abierta. Y segundo: si $A = \{(x_1, x_2) \in X \times X :\ f(x_1) = f(x_2)\}$ y $\Delta_f : X \to A$ es la función definida por $\Delta_f(x) = (x, x)$, vale que Δ_f es abierta. (El espacio A tiene la topología que hereda como subespacio de $X \times X$.)

Probar que efectivamente las tres propiedades son equivalentes.

(b) Probar que las siguientes funciones son homemomorfismos locales:
(i) $f : \mathbb{R} \to S^1$, $f(t) = (\cos\theta(2\pi t), \sin(2\pi t))$.
(ii) $f : \Delta^* \to \Delta^*$, $f(z) = z^r$, donde $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z| < 1\}$ y $r \in \mathbb{N}$.

Topología Producto vs. Topología Caja

(14) Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subseteq X_i$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_{i\in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?
(a) Si cada A_i es cerrado en X_i entonces $\prod_{i\in I} A_i$ es cerrado en X.
(b) $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

(15) Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red de puntos en el espacio topológico $X = \prod_{i\in I} X_i$ (considerado con la topología producto). Probar que la sucesión $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x si y sólo si la red $\pi_i(x_\alpha)$ converge a $\pi_i(x)$ en X_i para todo $i \in I$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?

(16) (a) Comparar las topologías caja, producto y uniforme en $\mathbb{R}^\omega$.
(b) Hacer de nuevo los items (b), (c), (d) del ejercicio 25 de la práctica 1, tomando en $\mathbb{R}^\omega$ la topología caja y la producto. Comparar con lo obtenido para la topología uniforme.

Topologías inciales y finales–Cocientes

(17) Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Sean $Z = \prod_{i\in I} X_i$, $W = \coprod_{i\in I} X_i$, y para cada $i \in I$, $\pi_i : Z \to X_i$ la proyección i-ésima, y $\lambda_i : X_i \to W$ la inclusión.
(a) Probar que π_i es abierta para todo $i \in I$.
(b) Probar que λ_i es abierta y cerrada.

(18) Sea $\left\{X \xrightarrow{f_i} X_i\right\}_{i\in I}$ una familia inicial de funciones (o sea, X tiene la topología inicial inducida por las funciones f_i), y $f : X \to \prod X_i$ la función definida por
$$f(x) = (f_i(x))_{i\in I}.$$
Sea Z la imagen de f. Probar que $f : X \to Z$ es abierta.

(19) Consideremos el espacio de Sierpinski, $S = \{0, 1\}$, $\mathcal{T}(S) = \{\emptyset, \{1\}, S\}$. Sea X un espacio topológico.
(a) Probar que $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si la función característica de A, $\chi_A : X \to S$, es continua.
(b) Probar que la familia $\{\chi_U\}_{U\in\mathcal{T}_X}$ es una familia inicial para la topología de X.

(20) Probar que si $f : X \to Y$ es final e inyectiva, entonces es inicial.

(21) Si $f : X \to Y$ es inicial y suryectiva, entonces es cociente (i.e. f es final y suryectiva).

(22) Sea $f : X \to Y$ una función continua. Probar que si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.

(23) Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada.
(a) Sea X el subespacio $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $g = \pi_1|_X$. Mostrar que g es cerrada pero no abierta.
(b) Sea Y el subespacio $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $h = \pi_1|_Y$. Mostrar que h no es abierta ni cerrada pero es cociente.

(24) Caracterizar el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ en cada uno de los siguientes casos
(a) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$.
(b) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$.

(25) Sea Z el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Z$ por la fórmula

$$\begin{cases} g((x,y)) &= (x,0) \text{ si } x \neq 0 \\ g((0,y)) &= (0,y) \end{cases}$$

(a) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?

(b) Mostrar que Z con la topología cociente inducida por g no es Hausdorff.

(26) Sean X un espacio topológico , $\sim$ una relación de equivalencia en X y $p : X \to X/_\sim$ la proyección al cociente.

Sea $R = \{(x,y) \in X \times X : \ x \sim y\}$. Probar que :

(a) Si $X/_\sim$ es Hausdorff, entonces R es cerrado en $X \times X$.

(b) Si $p\colon X \to X/_\sim$ es abierta y R es cerrado en $X \times X$, entonces $X/_\sim$ es Hausdorff .

(c) Si $p \times p : X \times X \to X/_\sim \times X/_\sim$ dada por $p \times p\ (x_1, x_2) = (p(x_1), p(x_2))$ es final, y R es cerrado en $X \times X$, entonces $X/_\sim$ es Hausdorff.

(27) Sea $X = \mathbb{C} \times \{0,1\}$ con la topología producto, $\{0,1\}$ con la topología discreta. Definimos en X dos relaciones de equivalencia:

$$(z,0) \sim_1 (w,1) \Leftrightarrow z = w \neq 0, \ \ (z,j) \sim_1 (w,j) \Leftrightarrow z = w$$

$$(z,0) \sim_2 (w,1) \Leftrightarrow z.w = 1, \ \ (z,j) \sim_2 (w,j) \Leftrightarrow z = w$$

Se definen $X_1 = X/_{\sim_1}$, $X_2 = X/_{\sim_2}$ y se les da a ambos la topología cociente. Probar que:

(a) En X_1 todo punto es cerrado, pero X_1 no es Hausdorff.

(b) Probar que $f : X \to S^2$ definida por

$$f(x+iy, j) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, 1-x^2-y^2) & \text{si} \quad j = 0 \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, -2y, x^2+y^2-1) & \text{si} \quad j = 1 \end{cases}$$

induce un homeomorfismo $\overline{f} : X_2 \to S^2$. (Sugerencia: Probar que $\overline{f}$ es biyectiva; probar la continuidad de la inversa en los abiertos $S^2 \setminus \{P_N\}$, $S^2 \setminus \{P_S\}$, donde P_N y P_S son los polos norte y sur respectivamente.)