Topología

Segundo Cuatrimestre 2002

Práctica 4

Separación.

(1) Mostrar que si X es regular, todo par de puntos de X tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

(2) Mostrar que si X es regular, todo par de cerrados disjuntos tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

(3) Mostrar que si X es un conjunto ordenado, entonces, con la topología del orden, X es regular.

(4) Mostrar que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

(5) Mostrar que si $\prod X_\alpha$ es Hausdorff, o regular o normal, entonces cada X_α lo es.

(6) Sea X un conjunto con dos topologías $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$. Supongamos que $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$. Si X es Hausdorff o regular o normal con alguna de las topologías, ¿qué se puede decir sobre la otra?

(7) Mostrar que todo espacio localmente compacto y Hausdorff es completamente regular.

(8) Mostrar que $\mathbb{R}_l^2$ es completamente regular, a pesar de no ser normal.

(9) Sea X completamente regular; sean A y B subconjuntos de X cerrados y disjuntos. Mostrar que si A es compacto, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

(10) Mostrar que $\mathbb{R}^J$ (donde J es un conjunto arbitrario de /'ındices con la topología caja es completamente regular. (Sugerencia: Probar que basta hacer el caso donde el entorno caja $(-1, 1)^J$ es disjunto del cerrado A y el punto es el origen. Después usar el hecho de que una función a valores reales continua en la topología uniforme es también continua en la topología caja.)

Compactificación de Stone-Cech.

(11) (a) Mostrar que toda función continua $f : S_\Omega \to \mathbb{R}$ es eventualmente constante. (Sugerencia: Primero probar que para cada $\epsilon > 0$ existe un elemento $\alpha \in S_\Omega$ tal que $|f(\beta) - f(\alpha)| < \epsilon$ para todo $\beta > \alpha$. Considerar para cada $\epsilon = 1/n$ los correspondientes α_n.)

(b) Mostrar que la compactificación a un punto de S_Ω es la compactificación de Stone-Cech.

(12) Sea X completamente regular. Probar que X es conexo si y sólo si $\beta(X)$ es conexo. (Sugerencia: Si $X = A \cup B$ es una separación de X, sea $f : X \to [0, 1]$, $f(x) = 0$ si $x \in A$, $f(x) = 1$ si $x \in B$.)

Espacios de funciones.

(13) Sean X espacios topológico e (Y, d) un espacio métrico. Dada $f \in Y^X$, un compacto $C \subset X$ y un número $\epsilon > 0$, sea

$$B_C(f, \epsilon) = \{g \in Y^X : \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in C\} < \epsilon\}$$

Mostrar que los conjuntos $B_C(f, \epsilon)$ forman una base para una topología en Y^X. Se llama la topología de convergencia sobre compactos.

(14) Sea (Y, d) un espacio métrico. Probar que una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to Y$ converge a una función f en la topología de convergencia sobre compactos si y sólo si para cada compacto $C \subset X$, la sucesión $f_n| : C \to Y$ converge uniformemente a $f|C$.

(15) Similarmente a como se definió la topología uniforme en $\mathbb{R}^\omega$, definimos en Y^X la topología uniforme, para (Y, d) métrico. Primero tomamos la métrica acotada $\overline{d}(y_1, y_2) = \min\{d(y_1, y_2), 1\}$. Luego tomamos en Y^X la métrica $d'(f, g) = \sup\{\overline{d}(f(x), g(x)) : x \in X\}$. La topología uniforme en Y^X es entonces la inducida por la métrica d'.

Probar que la topología uniforme es más fina que la topología de convergencia sobre compactos, y que esta es más fina que la topología de convergencia puntual. Probar además que si X es compacto las dos primeras coinciden, y que si X es discreto la dos últimas coinciden.

(16) Considerar la sucesión de funciones $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

(a) Probar que (f_n) converge en la topología de convergencia sobre compactos. Deducir que el límite es continuo.

(b) Mostrar que (f_n) no converge en la topología uniforme.

(17) Probar que si (Y,d) es métrico, la topología compacto abierta y la de convergencia sobre compactos coinciden.

(18) Sea C un subespacio de X. Mostrar que la restricción $f : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(C,Y)$ es continua si en ambos espacios tomamos la topología de convergencia puntual o la compacto abierta.

(19) Mostrar que en la topología compacto abierta, $\mathcal{C}(X,Y)$ es Hausdorff si Y lo es, y regular si Y lo es. (Sugerencia: Si $\overline{U} \subset V$, entonces $\overline{S(C,U)} \subset S(C,V)$.)

(20) Notemos con $\mathcal{C}'(X,Y)$ al conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ en alguna topología $\mathcal{T}$. Mostrar que si la evaluación

$$e : X \times \mathcal{C}'(X,Y) \to Y$$

es continua, entonces $\mathcal{T}$ contiene la topología compacto abierta.

(21) Mostrar que $ev : [0,1]^{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q} \to [0,1]$ no es continua. (Sugerencia: $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto y es completamente regular.)