Topología

Segundo Cuatrimestre 2002

Práctica 8

Homología - Primer parte

(1) Probar el lema de los 5.

(2) Decimos que un complejo (C_*, d) se escinde si existen morfismos $s_n : C_n \to C_{n+1}$ tales que $d = dsd$.
  (a) Probar que si (C_*, d) se escinde entonces existe una equivalencia homotópica de complejos $\phi : (C_*, d) \to H_*(C)$, donde $H_*(C)$ es el complejo formado por los grupos de homología de C con diferencial cero.
  (b) Dar un contraejemplo para probar que la vuelta del item anterior es falsa.

(3) Sea (C_*, d) un complejo. Definimos el cono de C como el complejo que en grado n es el grupo abeliano $C_{n-1} \oplus C_n$ y con diferencial
$$d' : C_{n-1} \oplus C_n \to C_{n-2} \oplus C_{n-1}$$
definida por
$$d'(a, b) = (-d(a), d(b) - a)$$
Probar que el cono de C es contráctil. (sug: considerar $s : C_{n-1} \oplus C_n \to C_n \oplus C_{n+1}$ definida por $s(a, b) = (-b, 0)$).

(4) Sea $f : C_* \to D_*$ morfismo de complejos. Probar que f es null homotópica si y sólo si se extiende al cono de C_*.

(5) Sea $f : C_* \to D_*$ un morfismo de complejos. Definimos el cono de f como el complejo $C(f)$ que en grado n es el grupo abeliano $C_{n-1} \oplus D_n$ y cuya diferencial está definida por
$$d(a, b) = (-d(a), d(b) - f(a))$$
  (a) Probar que $C(f)$ es efectivamente un complejo.
  (b) Probar que existe una s.e.c. de complejos
$$0 \to C_* \to C(f) \to D[-1] \to 0$$
  donde $D[-1]$ es el trasladado del complejo D_*, es decir $(D[-1])_n = D_{n-1}$ y el morfismo $s : C(f) \to D[-1]$ está definido por $s(a, b) = -a$.
  (c) Probar usando el item anterior que un morfismo $f : C_* \to D_*$ es un quasi-isomorfismo si y sólo si $C(f)$ es acíclico.

(6) Sea X espacio topológico y $\{X_k\}$ familia de componentes arco conexas de X. Probar que $H_n(X) = \oplus H_n(X_k)$.

(7) Probar que si $i : A \to X$ es un retracto entonces $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es sección.

(8) Sea A un subespacio de X. Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si A interseca todas las componentes arco conexas de X.

(9) Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ un punto. Calcular la homología relativa $H_*(X, x_0)$ en función de la homología usual $H_*(X)$.

(10) Probar que $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$, donde $\tilde{H}(X)$ denota la homología reducida de X.

(11) Probar que una función continua $f : X \to Y$ induce un morfismo entre las homologías reducidas $f_* : \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$.

(12) Calcular $H_1(X)$ para los siguientes espacios:
  (a) $X = S^n$.
  (b) $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
  (c) $X = S^1 \times S^1$.
  (d) $X = S^1 \vee S^1$.
  (e) X la botella de Klein.