Topología

Segundo Cuatrimestre 2002

Práctica 9

Homología - Segunda parte

(1) (a) Probar que una función continua de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ induce un morfismo $f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ $\forall n$
(b) Probar que una homotopía de pares $h : f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ induce una homotopía $\phi : f_* \simeq g_*$ entre los complejos relativos y por lo tanto $f_* = g_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

(2) Sea X espacio topológico y A un subespacio. sea $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ la función de pares inducida por la identidad de X. Probar que $j_* : H_n(X, \emptyset) = H_n(X) \to H_n(X, A)$ coincide con el morfismo correspondiente de la sucesión exacta larga de homología relativa.

(3) Probar que (D^n, S^{n-1}) es un par bueno.

(4) Calcular $H_n(D^m, S^{m-1})$ para todo n, m.

(5) Sea X espacio topológico y sean $A, B \subseteq X$ subespacios tales que $B \subseteq A$. Probar que existe una s.e. larga

$$\ldots \to H_n(A, B) \to H_n(X, B) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, B) \to \ldots$$

inducida por las inclusiones.

(6) Sea $i : A \to X$ subespacio y sea $C(i)$ el cono de la inclusión i. Probar que $\tilde{H}_n(C(i)) = H_n(X, A)$.

(7) Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que (X_i, x_i) es un par bueno para todo i. sea $X = \vee_i X_i$ la unión de los espacios, identificando todos los puntos bases x_i. probar que $\tilde{H}_n(X) = \oplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.

(8) Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos no vacíos. Probar que si U y V son homeomorfos, entonces $n = m$.

(9) (a) sea $f : (X, A) \to (Y, B)$ función de pares tal que $f : X \to Y$ y $f : A \to B$ son equivalencias homotópicas. Probar que $f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ es un isomorfismo.
(b) Probar que la inclusión $i : (D^m, S^{m-1}) \to (D^m, D^m - \{0\})$ no es una equivalencia homotópica de pares pero $i : D^m \to D^m$ e $i : S^{m-1} \to D^m - \{0\}$ son equivalencias homotópicas.

(10) Dada $f : S^n \to S^n$, el morfismo $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_n(S^n)$ es un endomorfismo de $\mathbb{Z}$ y por lo tanto tiene la forma $f_*(m) = dm$ para algún $d \in \mathbb{Z}$ (que depende sólo de f). Se define el grado de f como $deg(f) = d$. Probar que
(a) $deg(1_{S^n}) = 1$.
(b) si f no es suryectiva entonces $deg(f) = 0$.
(c) si $f \simeq g$ entonces $deg(f) = deg(g)$.
(d) $deg(fg) = deg(f).deg(g)$.
(e) si f es equivalencia homotópica entonces $deg(f) = 1$ o $deg(f) = -1$.
(f) si f es una reflexión (es decir $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1})$) entonces $deg(f) = -1$.
(g) si $f(x) = -x$ entonces $deg(f) = (-1)^{n+1}$.
(h) si f no tiene puntos fijos entonces $deg(f) = (-1)^{n+1}$.