Topología
Segundo Cuatrimestre 2003
Lectura - Ejercicios Adicionales
Complejos Simpliciales y Poliedros

Definición 1. Un complejo simplicial K consiste en un conjunto de vértices V y un conjunto S cuyos elementos son subconjuntos finitos no vacíos de V llamados símplices, tal que

(1) Todo subconjunto de exactamente un elemento de V es un simplex.
(2) Todo subconjunto no vacío de un simplex es también un simplex.

Notaremos con v a los vértices de K y con s a los símplices.

Un simplex s que contiene exactamente $n+1$ vértices se llama n-simplex (ó lo que es lo mismo, diremos que $dim\ s = n$). Si $s' \subseteq s$, entonces el simplex s' se llama cara del simplex s y se llamará cara propia si $s' \neq s$. Notar que los 0-símplices son los vértices y que un simplex cualquiera queda determinado por sus 0-caras (los vértices que lo componen).

Ejemplos 2. (1) Sea A un conjunto. Podemos construir un complejo simplicial a partir de A tomando el conjunto A como los vértices y a todos los subconjuntos finitos no vacíos de A como los símplices.
(2) Sea s un simplex de un complejo simplicial K. Podemos considerar a s como un complejo simplicial donde los símplices son todas las caras de s. Este complejo se nota $\overline{s}$.
(3) Idem ejemplo anterior, pero tomando las caras propias de s. Este complejo se nota $\dot{s}$.
(4) Si K complejo simplicial, podemos definir el complejo simplicial K^n que consiste en todos los símplices de dimensión menor o igual a n. Este complejo se llama el n-esqueleto de K.

Definición 3. Decimos que la dimensión de un complejo simplicial K es n si K posee n-símplices pero no tiene $(n+1)$-símplices. La dimensión es infinita si K tiene n-símplices para todo n natural. La dimensión es -1 si K es el complejo simplicial vacío.

Decimos que K es finito si contiene una cantidad finita de símplices. Obviamente si K es finito, su dimensión también es finita, pero la recíproca no es cierta.

Ejemplo 4. El complejo simplicial K cuyos vértices son $V_K = \{a, b, c\}$ y sus símplices son

$$S_K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

tiene dimensión 2, en cambio el complejo simplicial L cuyos vértices coinciden con los de K pero cuyos símplices son

$$S_L = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

tiene dimensión 1. Notar además que $L = \dot{K}$.

Definición 5. Un morfismo simplicial $f : K \to L$ es una función que va desde el conjunto de vértices de K al conjunto de vértices de L tal que $f(s)$ es un simplex en L si s es un simplex de K.

Dado un complejo simplicial K, construiremos dos espacios topológicos a partir de K que tienen el mismo conjunto subyacente, pero uno de ellos será un espacio métrico y el otro tendrá una topología coherente con los símplices que lo componen.

Construcción 6. Sea K complejo simplicial. Sea $|K|$ el conjunto de todas las funciones α (de conjuntos) que van desde el conjunto de vértices de K al intervalo I tales que

(1) Para toda α, el conjunto
$$\{v \in K,\ \alpha(v) \neq 0\}$$
es un simplex de K (en particular, el soporte de α es finito).

(2) $\sum_{v \in K} \alpha(v) = 1$.

El espacio métrico $|K|_d$ consiste en el conjunto $|K|$ con la métrica definida por

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in K} (\alpha(v) - \beta(v))^2}$$

En realidad esta topología no es la que se usa. Vamos a definir la topología coherente (ó débil) en el conjunto $|K|$ de la siguiente manera:

Construcción 7. Dado un simplex s de K, consideremos el simplex cerrado $|s|$, que es el subconjunto de $|K|$ definido por:
$$|s| = \{\alpha, \alpha(v) = 0\ \forall v \notin s\}$$
Notar que si s es un n-simplex, entonces $|s|$ está en biyección con el n-simplex estándar
$$\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ 0 \leq x_i \leq 1 \text{ y } \sum x_i = 1\}$$

Más aún, si le damos a $|s|$ la topología que definimos para $|K|_d$, entonces $|s|$ es homeomorfo a Δ_n. Entonces consideramos a todos los símplices $|s|$ con la topología métrica y le damos al conjunto $|K|$ la topología coherente con la topología dada a los $|s|$ (la topología final). Es decir, un subconjunto B es cerrado (abierto) en $|K|$ sii $B \cap |s|$ es cerrado (abierto) para todo $s \in K$. Notaremos directamente con $|K|$ a este espacio topológico.

Ejercicios 1. (1) Sea K un complejo simplicial y X espacio topológico. Probar que una función $f : |K| \to X$ es continua si y sólo si las restricciones $f : |s| \to X$ son continuas.

(2) Probar que $f : |K| \to X$ es continua si y sólo si las restricciones $f : |K^n| \to X$ son continuas para todo $n \geq 0$.

(3) Probar que la función $i : |K| \to |K|_d$ que es la identidad en el conjunto subyacente, es continua. Deducir que $|K|$ es Hausdorff.

(4) Probar que $H : |K| \times I \to X$ es continua si y sólo si las restricciones $H : |s| \times I \to X$ son continuas para todo s.

Definición y Observación 8. Dado un simplex s, se define el simplex abierto $< s > \subset |K|$ como el subconjunto
$$< s > = \{\alpha \in |K|,\ \alpha(v) \neq 0 \Leftrightarrow v \in s\}$$
Notar que $< s >$ es abierto en $|s|$ pero no es necesariamente abierto en $|K|$. Notar también que todo elemento de $|K|$ pertenece a un único $< s >$.

Ejercicios 2. (1) Sea A un subespacio de $|K|$. Probar que A contiene un subespacio discreto A' que consiste en exactamente un punto por cada simplex abierto $< s >$ que interseca a A.

(2) Probar que todo subespacio compacto de $|K|$ está contenido en una cantidad finita de símplices abiertos. Deducir que K es un complejo simplicial finito si y sólo si $|K|$ es compacto.

Definición 9. Una triangulación (K, f) de un espacio topológico X consiste en un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \to X$. Si X admite una triangulación se llama Poliedro.

Observación 10. Notar que un poliedro puede admitir dos triangulaciones diferentes (K, f) y (L, g) tales que K y L no sean complejos simpliciales isomorfos.

Ejercicios 3.

(1) Probar que los siguientes espacios son poliedros, encontrando una triangulación.
   (a) D^n
   (b) S^n
   (c) $\mathbb{R}^n$.
(2) Encontrar un poliedro que admita dos triangulaciones que no sean isomorfas como complejos simpliciales.