Topología

Segundo Cuatrimestre 2003
Práctica 0
Conjuntos bien ordendados

(1) **Teorema (Principio general de definición recursiva).** Sea J un conjunto bien ordenado con primer elemento α_0. Sea C un conjunto. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones con dominio alguna sección de J y codominio C (incluyendo la función vacía $\emptyset : S_{\alpha_0} \to C$). Sea $\rho : \mathcal{F} \to C$ una función. Entonces existe una única función $h : J \to C$ tal que

$$(*) \qquad h(\alpha) = \rho(h|_{S_\alpha})$$

para todo $\alpha \in J$.

(a) Probar que si h, k son dos funciones definidas en todo J o en una sección de J y verifican $(*)$ para todo α en sus respectivos dominios, entonces $h(\alpha) = k(\alpha)$ para todo α en ambos dominios.

(b) Probar que si existe $h : S_\alpha \to C$ que verifica $(*)$, entonces existe $k : S_\alpha \cup \{\alpha\} \to C$ que verifica $(*)$.

(c) Probar que si $K \subset J$ y para todo $\alpha \in K$ existe una función $h_\alpha : S_\alpha \to C$ que verifica $(*)$, entonces existe una función

$$k : \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \to C$$

que verifica $(*)$.

(d) Probar, por inducción transfinita, que para todo $\beta \in J$, existe una función $h_\beta : S_\beta \to C$ que verifica $(*)$. (Sugerencia: Si β tiene un predecesor inmediato α, entonces $S_\beta = S_\alpha \cup \{\alpha\}$. Si no, S_β es la unión de todos los S_α con $\alpha < \beta$.)

(e) Probar el teorema.

(2) (a) Sean J, E conjuntos bien ordenados, y $h : J \to E$. Probar que son equivalentes:

(i) h preserva el orden y es suryectiva o su imagen es una sección de E.

(ii) $h(\alpha) = \min[E \setminus h(S_\alpha)]$ para todo $\alpha \in J$.

(Sugerencia: probar primero que cada una de las propiedades implica que $h(S_\alpha)$ es una sección de E, y que esta tiene que ser la sección por $h(\alpha)$).

(b) Si E es un conjunto bien ordenado probar que el tipo de orden de una sección de E es distinto del tipo de orden de E, y que dos secciones distintas de E tienen tipos de orden distintos. (Sugerencia: dado J, existe a lo suma una aplicación que preserva el orden de J en E cuya imagen es E o una sección de E.)

(3) Sean J, E conjuntos bien ordenados y sea $k : J \to E$ que preserva el orden. Entonces el tipo de orden de J es el de E o el de una sección de E. (Sugerencia: elegir $e_0 \in E$. Definir $h : J \to E$ mediante la recursión

$$h(\alpha) = \min(E \setminus h(S_\alpha)) \text{ si } h(S_\alpha) \neq E$$

y $h(\alpha) = e_0$ en caso contrario. Demostrar que $h(\alpha) \leq k(\alpha)$ para todo $\alpha \in J$; concluir que $h(S_\alpha) \neq E$ para todo $\alpha \in J$.)

(4) Probar lo siguiente:

(a) Si A y B son conjuntos bien ordenados, entonces se verifica exactamente una de las siguientes tres condiciones: A y B tienen el mismo tipo de orden, o A tiene el tipo de orden de una seccción de B, o B tiene el tipo de orden de una sección de A. (Sugerencia: construir un conjunto bien ordenado que contenga a A y a B y usar el ejercicio anterior).

(b) Supongamos que A y B son dos conjuntos bien ordenados no numerables, tales que toda sección de de A y B es numerable. Entonces A y B tienen el mismo tipo de orden.

(5) Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ la familia de todos los pares $(A, <)$, donde A es un subconjunto de X y $<$ es un buen orden de A. Definimos

$$(A, <) \prec (A', <')$$

si $(A, <)$ es igual a una sección de $(A', <')$.

(a) Demostrar que $\prec$ es un orden parcial sobre $\mathcal{A}$.

(b) Sea $\mathcal{B}$ una subfamilia de $\mathcal{A}$ totalmente ordenada por $\prec$. Definimos B' como la unión de los conjuntos B para todo $(B,<) \in \mathcal{B}$; y definimos $<'$ como la unión de las relaciones $<$, para todo $(B,<) \in \mathcal{B}$. Demostrar que $(B',<')$ es un conjunto bien ordenado.

(6) Usando los ejercicios 1–4 construir un conjunto bien ordenado no numerable.

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de pares $(A,<)$ donde $A \subset \mathbb{N}$ y $<$ es un buen orden en A (el conjunto vacío, con el buen orden vacío pertenece a $\mathcal{A}$). Se define una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{A}$ de la siguiente manera

$$(A,<) \sim (A',<') \iff (A,<) \text{ y } (A',<') \text{ tienen el mismo tipo de orden.}$$

Sea $[(A,<)]$ la clase de equivalencia de $(A,<)$; sea E el conjunto de las clases de equivalencia. Se define

$$[(A,<)] \ll [(A',<')]$$

si $(A,<)$ tiene el tipo de orden de una sección de $(A',<')$.

(a) Probar que $\ll$ define un orden en E, con primer elemento $[(\emptyset,\emptyset)]$.

(b) Probar que si $\alpha = [(A,<)] \in E$, entonces $(A,<)$ tiene el mismo tipo de orden que S_α. (Sugerencia: definir $f : A \to S_\alpha$ por $f(x) = [(A_x, < |_{A_x})]$.)

(c) Deducir que $(E,\ll)$ es bien ordenado.

(d) Mostrar que E es no numerable. (Sugerencia: si $h : E \to \mathbb{N}$ es una biyección, entonces h induce un buen orden en $\mathbb{N}$.)

(e) Mostrar que todas las secciones de E son numerables. Por lo tanto E es el único conjunto bien ordenado no numerable cuyas secciones son todas numerables (salvo isomorfismos de conjuntos ordenados).

Observación: Se puede usar el mismo procedimiento para, dado X un conjunto bien ordenado, construir un conjunto bien ordenado de mayor cardinal.

(7) Usando los ejercicios 1–5 demostrar el

Teorema: El principio del máximo es equivalente al teorema del buen orden.

(8) Usando los ejercicios 1–5 demostrar el

Teorema: El axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden.

Demostración. Sean X un conjunto y c una función de elección fijada para los subconjuntos no vacíos de X. Si T es un subconjunto de X y $<$ es una relación sobre T, decimos que $(T,<)$ es una torre en X si $<$ es un buen orden de T y si para cada $x \in T$,

$$x = c(X - S_x(T)),$$

donde $S_x(T)$ es la sección por de T por x.

(a) Sean $(T_1,<_1)$ y $(T_2,<_2)$ dos torres en X. Demostrar que estos dos conjuntos ordenados son el mismo o uno es una sección del otro. (Sugerencia: supongamos que $h : T_1 \to T_2$ preserva el orden y $h(T_1)$ es igual a T_2 o a una sección de T_2. Probar que entonces $h(x) = x$ para todo $x \in T_1$.)

(b) Si $(T,<)$ es una torre en X y $T \neq X$, demostrar que existe una torre en X de la cual $(T,<)$ es una sección.

(c) Sea $\{(T_k,<_k) : k \in K\}$ la familia de todas las torres de X. Sean

$$T = \bigcup_{k\in K} T_k \qquad \text{y} \qquad < \;=\; \bigcup_{k\in K} (<_k).$$

Demostrar que $(T,<)$ es una torre en X. Concluir que $T = X$.