

Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2003

PRÁCTICA 2

Topología subespacio.

- (1) Sea X un espacio topológico, $Y \subset X$ un subconjunto e $i : Y \rightarrow X$ la inclusión. Probar que la topología del subespacio de Y está caracterizada por la siguiente propiedad:
“Para todo espacio topológico Z y toda función $f : Z \rightarrow Y$, se tiene que f es continua si y sólo si $i \circ f : Z \rightarrow X$ lo es.”
(O sea, probar que la topología del subespacio en Y es la única topología que se puede poner en Y de manera que valga la propiedad anterior.)
- (2) Probar que si Z es un subespacio de X , y A es un subconjunto de Z , entonces la topología de A como subespacio de Y coincide con la topología de A como subespacio de X .
- (3) Consideremos a $Y = [-1, 1]$ como subespacio de \mathbb{R} . ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en Y ?
¿Cuáles son abiertos en \mathbb{R} ?
 $A = \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\}$,
 $B = \{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$,
 $C = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\}$,
 $D = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$,
 $E = \{x : 0 < |x| < 1 \wedge 1/x \notin \mathbb{N}\}$.
- (4) Sea X ordenado, con la topología del orden, y sea $Y \subset X$ un subconjunto. En Y se puede considerar la topología que hereda como subespacio de X , y la topología del orden (ya que Y es ordenado, por el mismo orden que X). Comparar estas dos topologías.

Topología Producto de dos espacios. Salvo que se especifique otra cosa la topología en un producto $X \times Y$ de dos espacios topológicos es la producto.

- (5) Sean X, Y espacios topológicos. Probar que $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ son abiertas.
- (6) Probar que la topología del orden del diccionario en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ donde \mathbb{R}_d es la topología discreta en \mathbb{R} . Comparar con la topología usual de \mathbb{R}^2 .
- (7) Sea \mathbb{R}_l la topología cuya base de abiertos son los conjuntos de la forma $[a, b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Sea L una recta en el plano. Describir la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.
- (8) Sea I el subespacio $[0, 1]$ de \mathbb{R} . Comparar la topología producto en $I \times I$ con la topología del orden del diccionario en $I \times I$ y con la topología $I_d \times I$ donde I_d denota a I con la topología discreta.
- (9) Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluir que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y , entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.
- (10) Probar que el producto de espacios Hausdorff es Hausdorff, y que un subespacio de un espacio Hausdorff es Hausdorff.
- (11) Probar que X es Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.
- (12) (a) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Probar que las funciones $f : X \rightarrow X \times Y$ y $g : Y \rightarrow X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son inmersiones (i.e. definen un homeomorfismo con su imagen).
(b) Sea X un espacio con una distancia $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que la topología inducida por la métrica es la mínima tal que d es continua. (Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.)

Topología Producto vs. Topología Caja

- (13) Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subseteq X_i$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?
- (a) Si cada A_i es cerrado en X_i entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es cerrado en X .
- (b) $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.
- (14) Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red de puntos en el espacio topológico $X = \prod_{i \in I} X_i$ (considerado con la topología producto). Probar que la sucesión $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x si y sólo si la red $\pi_i(x_\alpha)$ converge a $\pi_i(x)$ en X_i para todo $i \in I$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?
- (15) (a) Comparar las topologías caja, producto y uniforme en \mathbb{R}^ω .
- (b) Hacer de nuevo los items (b), (c), (d) del ejercicio 25 de la práctica 1, tomando en \mathbb{R}^ω la topología caja y la producto. Comparar con lo obtenido para la topología uniforme.
- (16) Considerar la función h definida en el ejercicio 26 de la práctica 1. Probar que con sólo pedir que todos los a_i sean no nulos entonces h es un homeomorfismo si se considera en \mathbb{R}^ω la topología producto. ¿Y si en \mathbb{R}^ω consideramos la topología caja?

Topologías iniciales y finales–Cocientes

- (17) Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Sean $Z = \prod_{i \in I} X_i$, $W = \prod_{i \in I} X_i$, y para cada $i \in I$, $\pi_i : Z \rightarrow X_i$ la proyección i -ésima, y $\lambda_i : X_i \rightarrow W$ la inclusión.
- (a) Probar que π_i es abierta para todo $i \in I$.
- (b) Probar que λ_i es abierta y cerrada.
- (18) Sea $\left\{ X \xrightarrow{f_i} X_i \right\}_{i \in I}$ una familia inicial de funciones (o sea, X tiene la topología inicial inducida por las funciones f_i), y $f : X \rightarrow \prod X_i$ la función definida por
- $$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}.$$
- Sea Z la imagen de f . Probar que $f : X \rightarrow Z$ es abierta.
- (19) Consideremos el espacio de Sierpinski, $S = \{0, 1\}$, $\mathcal{T}(S) = \{\emptyset, \{1\}, S\}$. Sea X un espacio topológico.
- (a) Probar que $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si la función característica de A , $\chi_A : X \rightarrow S$, es continua.
- (b) Probar que la familia $\{\chi_U\}_{U \in \mathcal{T}_X}$ es una familia inicial para la topología de X .
- (20) Probar que si $f : X \rightarrow Y$ es final e inyectiva, entonces es inicial.
- (21) Si $f : X \rightarrow Y$ es inicial y suryectiva, entonces es cociente (i.e. f es final y suryectiva).
- (22) Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que si existe $g : Y \rightarrow X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.
- (23) Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada.
- (a) Sea X el subespacio $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $g = \pi_1|_X$. Mostrar que g es cerrada pero no abierta.
- (b) Sea Y el subespacio $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $h = \pi_1|_Y$. Mostrar que h no es abierta ni cerrada pero es cociente.
- (24) Caracterizar el espacio cociente \mathbb{R}^2 / \sim en cada uno de los siguientes casos
- (a) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$.
- (b) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$.
- (25) Sea Z el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow Z$ por la fórmula
- $$\begin{cases} g((x, y)) &= (x, 0) \text{ si } x \neq 0 \\ g((0, y)) &= (0, y) \end{cases}$$
- (a) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?
- (b) Mostrar que Z con la topología cociente inducida por g no es Hausdorff.

(26) Sean X un espacio topológico, \sim una relación de equivalencia en X y $p : X \rightarrow X/\sim$ la proyección al cociente.

Sea $R = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$. Probar que :

- (a) Si X/\sim es Hausdorff, entonces R es cerrado en $X \times X$.
- (b) Si $p : X \rightarrow X/\sim$ es abierta y R es cerrado en $X \times X$, entonces X/\sim es Hausdorff.
- (c) Si $p \times p : X \times X \rightarrow X/\sim \times X/\sim$ dada por $p \times p(x_1, x_2) = (p(x_1), p(x_2))$ es final, y R es cerrado en $X \times X$, entonces X/\sim es Hausdorff.

(27) Sea $X = \mathbb{C} \times \{0, 1\}$ con la topología producto, $\{0, 1\}$ con la topología discreta. Definimos en X dos relaciones de equivalencia:

$$(z, 0) \sim_1 (w, 1) \Leftrightarrow z = w \neq 0, \quad (z, j) \sim_1 (w, j) \Leftrightarrow z = w$$

$$(z, 0) \sim_2 (w, 1) \Leftrightarrow z \cdot w = 1, \quad (z, j) \sim_2 (w, j) \Leftrightarrow z = w$$

Se definen $X_1 = X/\sim_1$, $X_2 = X/\sim_2$ y se les da a ambos la topología cociente. Probar que:

- (a) En X_1 todo punto es cerrado, pero X_1 no es Hausdorff.
- (b) Probar que $f : X \rightarrow S^2$ definida por

$$f(x + iy, j) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, 1 - x^2 - y^2) & \text{si } j = 0 \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, -2y, x^2 + y^2 - 1) & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

induce un homeomorfismo $\bar{f} : X_2 \rightarrow S^2$. (Sugerencia: Probar que \bar{f} es biyectiva; probar la continuidad de la inversa en los abiertos $S^2 \setminus \{P_N\}$, $S^2 \setminus \{P_S\}$, donde P_N y P_S son los polos norte y sur respectivamente.)

Acciones de un grupo en un espacio topológico.

Sea X un espacio topológico y G un grupo. Decimos que G actúa sobre X y que X es un G -espacio si existe una función de $G \times X \rightarrow X$ que denotaremos $(g, x) \mapsto g \cdot x$ tal que

- i) $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$, donde $e \in G$ es la identidad de G .
- ii) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ para todo $x \in X$ y todo $g, h \in G$.
- iii) Para todo $g \in G$ la función $\theta_g : X \rightarrow X$ definida por $\theta_g(x) = g \cdot x$ es continua.

(28) Probar que los siguientes espacios topológicos son G -espacios.

- (a) $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, y la acción es $n \cdot x = n + x$, para $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (b) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y la acción es $(n, m) \cdot (x, y) = (n + x, m + y)$.
- (c) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$, y la acción es $\pm 1 \cdot x = \pm x$.
- (d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1/2 \leq y \leq 1/2\}$, $G = \mathbb{Z}$, y la acción es $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$.

(29) Si X es un G -espacio, podemos definir en X una relación de equivalencia por

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

El espacio de cociente resultante lo notamos con X/G , y consideramos en él la topología cociente.

- (a) Probar que la proyección al cociente $p : X \rightarrow X/G$ es abierta.
- (b) Probar que si G es finito, p es cerrada.
- (c) Probar que el espacio cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} (ejercicio 28, a) es homeomorfo a S^1 .
- (d) Probar que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ejercicio 28, b) es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.
- (e) El espacio cociente S^n/\mathbb{Z}_2 (ejercicio 28, c) se nota $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, y se llama el espacio proyectivo real de dimensión n .
- (f) Probar que el espacio cociente X/\mathbb{Z} (ejercicio 28, d) es homeomorfo a la banda de Möbius. (Recordar que la banda de Möbius se define como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación que identifica $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$, $y \in [0, 1]$.)