Topología

Segundo Cuatrimestre 2003

Práctica 3

Conexión.

(1) Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, ¿qué puede implicar la conexión de X en una de las topologías respecto de la conexión en la otra?

(2) (a) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es conexo.

(b) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X. Demostrar que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $A \cup \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es conexo.

(3) ¿Es cierto que si X tiene la topología discreta, entonces X es totalmente disconexo? ¿Vale la vuelta?

(4) ¿Es cierto que si X es conexo, entonces para todo subconjunto A de X propio no vacío se tiene $FrA \neq \emptyset$? ¿Vale la vuelta?

(5) Considere los siguientes conjuntos con la topología del orden. Decidir cuáles son conexos.

(a) $\mathbb{N} \times [0, 1)$.

(b) $[0, 1) \times \mathbb{N}$.

(c) $[0, 1) \times [0, 1]$.

(d) $[0, 1] \times [0, 1)$.

(6) (a) Mostrar que entre los espacios $(0, 1), (0, 1]$ y $[0, 1]$ no hay dos homeomorfos.

(b) Supongamos que $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ son inmersiones (esto es, son iniciales e inyectivas). Mostrar que no necesariamente X e Y son homeomorfos.

(7) (a) ¿Es el producto de espacios arco-conexos arco-conexo?

(b) Si $A \subset X$ y A es arco-conexo, ¿Es $\overline{A}$ arco-conexo?

(c) Si $f : X \to Y$ es continua y X es arco-conexo, ¿Es $f(X)$ arco-conexo?

(d) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de subconjuntos arco-conexos de X y $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$, ¿Es $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ arco-conexo?

(8) Mostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$.

(9) Calcular las componentes conexas y arco-conexas de $\mathbb{R}_l$.

(10) Definamos en X la relación $x \sim y$ si no existe separación $X = A \cup B$ de X en dos conjuntos abiertos y disjuntos tales que $x \in A$, $y \in B$. Mostrar que es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se llaman cuasi-componentes de X. Mostrar que cada componente conexa de X está contenida en una cuasi-componente.

(11) Determinar las cuasi-componentes, las componentes conexas y las arco-conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ (donde K denota el conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, y $-K$ denota el conjunto $\{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$).

$A = (K \times [0, 1]) \cup (\{0\} \times [0, 1])$.

$B = (A \setminus \{(0, 1/2)\})$.

$C = B \cup ([0, 1] \times \{0\})$.

$D = (K \times [0, 1]) \cup (-K \times [-1, 0]) \cup ([0, 1] \times -K) \cup ([-1, 0] \times K)$.

(12) Sea X localmente arco-conexo. Mostrar que todo abierto conexo de X es arco-conexo.

Compacidad.

(13) (a) Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías en X. Supongamos que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. ¿La compacidad de alguna de estas topologías implica la compacidad de la otra?

(b) Si X es compacto y Hausdorff tanto para $\mathcal{T}$ como para $\mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ o no son comparables.

(14) (a) Mostrar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto en la topología del complemento finito.

(b) ¿Es $[0,1]$ compacto como subespacio de $\mathbb{R}$ en la topología

$$\mathcal{T}_c = \{U : \mathbb{R} \setminus A \text{ es numerable o todo } \mathbb{R}\}?$$

¿Lo es como subespacio de $\mathbb{R}_l$?

(15) Sean A, B dos subespacios compactos de un espacio X compacto y Hausdorff. Mostrar que existen abiertos disjuntos U, V tales que $U \supset A$, $V \supset B$.

(16) Mostrar que si $f : X \to Y$ es continua, donde X es compacto e Y es Hausdorff, entonces f es cerrada.

(17) Mostrar que si Y es compacto, entonces la proyección $\pi_1 : X \times Y \to Y$ es cerrada.

(18) *Teorema.* Sea $f : X \to Y$, con Y compacto y Hausdorff. Entonces f es continua si y sólo si el gráfico de f,

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\},$$

es cerrado en $X \times Y$.

(Sugerencia: Si G_f es cerrado y V es un entorno abierto de $f(x_0)$, encontrar un tubo que contenga a $\{x_0\} \times (Y \setminus V)$ que no corte a G_f.)

(19) Sea P el producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

donde X y Z con compactos e Y es Hausdorff. Probar que P es compacto.

Dar un contraejemplo, en el que Y no sea Hausdorff.

(20) Sea $h : X \to Y$ suryectiva y propia. Probar que si X es Hausdorff, entonces Y también lo es.

(21) Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

(22) Mostrar que si $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y todos los X_α, salvo una cantidad finita, son compactos.

(23) Sea X un espacio localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es continua, ¿Es $f(X)$ localmente compacto? ¿Y si f es además abierta?

(24) Probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}$.

(25) Probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorafa a S^n. (Considerar la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$, $p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n)$.)

Grupos Topológicos.

(26) Probar que los siguientes espacios son grupos topológicos con las operaciones indicadas

(a) $(\mathbb{R}, +)$.

(b) $(S^1, \cdot)$ ($\cdot$ el producto en $\mathbb{C}$).

(c) $GL(n, \mathbb{R}), \cdot$ considerando a $GL(n, \mathbb{R})$ con la topología métrica.

(d) Los subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$ de matrices de determinante 1, y $O(n, \mathbb{R})$ de matrices ortogonales.

(27) Probar que G es un grupo topológico si y sólo si la función $H : G \times G \to G$, $H(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es continua.

(28) Probar que para cada $a \in G$, las funciones $L_a : G \to G$ y $R_a : G \to G$, definidas por $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$ son homeomorfismos.

(29) Sea G un grupo topológico, y $\mathscr{F}_e$ el filtro de entornos de la identidad del grupo.

(a) Probar que $A \subseteq G$ es abierto si y sólo si $g^{-1} \cdot A \in \mathscr{F}_e$ para todo $g \in A$.

(b) $\mathscr{F}_e$ tiene las siguientes propiedades:

(i) Si $U \in \mathscr{F}_e$, existe $V \in \mathscr{F}_e$ tal que $V \cdot V^{-1} \subseteq U$,

(ii) Si $U \in \mathscr{F}_e$, y $g \in G$, $g \cdot U \cdot g^{-1} \in \mathscr{F}_e$.

(c) Sea G un grupo y $\mathscr{F}$ una familia de subconjuntos de G que verifican
I) $e \in U$ para todo $U \in \mathscr{F}$,
II) si $U, V \in \mathscr{F}$, entonces $U \cap V \in \mathscr{F}$,
III) si $U \in \mathscr{F}$ y $U \subseteq V$, entonces $V \in \mathscr{F}$
y las propiedades i) y ii) de la parte b), entonces existe una única topología en G tal que G es un grupo topológico y tal que $\mathscr{F}_e = \mathscr{F}$.

(30) Probar que si un grupo topológico G es T_0, entonces es T_2. Más aún, probar que dados $F \subset G$ un cerrrado, y $x \notin F$, existen abiertos U, V disjuntos tales que $F \subset V$, $x \in U$.

(31) Sean A, B subconjuntos de una grupo topológico G. Verificar que
(a) $\overline{A} \cdot \overline{B} \subseteq \overline{A \cdot B}$.
(b) $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$.
(c) $g \cdot \overline{A} \cdot h^{-1} = \overline{(g \cdot A \cdot h^{-1})}$ para todo $g, h \in G$.
(d) Deducir que si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces la clausura de H es también un subgrupo. Es más, si H es invariante, su clausura también.

(32) Considerar los grupos topológicos $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R})$ (este último es el subgrupo de $O(n, \mathbb{R})$ de matrices de determinante 1). Decidir si son compactos y/o conexos.

Un espacio topológico X se dice un *espacio homogéneo* si para todo par de puntos $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f(x) = y$.

Si X es un G-espacio, decimos que la acción de G en X es *transitiva* si para todo par de puntos $x, y \in X$, existe un elemento $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. En particular, si G actúa transitivamente en X, entonces X es un espacio homogéneo.

(33) Verificar que un grupo topológico es un espacio homogéneo.

(34) Sea G un grupo topológico, y $H \subseteq G$ un subgrupo. Sea G/H el espacio de clases a izquierda con la topología cociente; esto es, definimos en G la relación de equivalencia

$$g \sim g' \iff gh = g' \text{ para algún } h \in H$$

y notamos con G/H al espacio cociente $G/_\sim$. Probar:
(a) La proyección $p : G \to G/H$ es abierta.
(b) H es cerrado si y sólo si G/H es T_1.
(c) G actúa transitivamente en G/H, por lo tanto, G/H es un espacio homogéneo.
(d) Si H es invariante, entonces G/H es un grupo topológico y $p : G \to G/H$ es un *morfismo de grupos topológicos*, esto es, es morfismo de grupos y continuo. Además, si H es cerrado, G/H es Hausdorff.

(35) Sean X un espacio topológico Hausdorff y G un grupo topológico que actúa transitivamente en X. Sea $x \in X$ y sea $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ el grupo de isotropía de x. Probar:
(a) G_x es un subgrupo cerrado.
(b) Existe una aplicación continua y biyectiva de G/G_x en X.
(c) Si G es compacto, X es un espacio homogéneo.
(d) Probar que la esfera S^n es un espacio homogéneo. (Considerar la acción de $O(n+1)$ en S^n por multiplicación.)