# Topología

Segundo Cuatrimestre 2003
Práctica 5
Homotopía

Notaciones Varias:

$*$ el singleton
$I = [0,1]$ con la topología usual
$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / ||x|| = 1\}$ la esfera n-dimensional
$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n / ||x|| \leq 1\}$ el disco n-dimensional
$IX = X \times I$ el cilindro de $X$
$CX = IX/\sim$ el cono de $X$, $i : X \to CX$ la inclusión en la base del cono
$[X, Y]$ el conjunto de clases homotópicas de funciones continuas de $X$ a $Y$, es decir

$$[X, Y] = \{[f]/f : X \to Y \text{continuas, } [f] = [g] \text{sii } f \simeq g\} = Hom(X, Y)/\simeq$$

(1) Probar que $i_0, i_1 : X \to IX$ definidas por $i_0(x) = (x, 0)$, $i_1(x) = (x, 1)$ son equivalencias homotópicas con la misma inversa $p : IX \to X$, $p(x, t) = x$. Además $i_0 \simeq i_1$.

(2) (a) Probar que $[*, X] = \pi_0(X)$ para todo espacio $X$.
(b) En general: Si $Y$ es contráctil, entonces $[Y, X] = \pi_0(X)$.

(3) Sea $f : X \to Y$ continua y $Z$ espacio topológico. Definimos

$$f^* : [Y, Z] \to [X, Z], \ f^*([g]) = [gf]$$

$$f_* : [Z, X] \to [Z, Y], \ f_*([h]) = [fh]$$

(a) Probar que $f^*$ y $f_*$ están bien definidas.
(b) Probar que si $f \simeq g$ entonces $f^* = g^*$ y $f_* = g_*$.
(c) Deducir que si $f$ es equivalencia homotópica entonces $f^*$ y $f_*$ son biyecciones. En particular, si $X$ e $Y$ son del mismo tipo homotópico, entonces $\pi_0(X) = \pi_0(Y)$.

(4) Sea $(G, .)$ un grupo topológico. Probar que $[X, G]$ es un grupo con la operación definida por

$$[f].[g] = [f.g]$$

donde $f.g(x) = f(x).g(x)$. Probar además que si $f : X \to Y$ es continua entonces $f^* : [Y, G] \to [X, G]$ es morfismo de grupos.

(5) Sean $f, g : X \to Y$ tal que $f \simeq g$. Probar que $f$ es equivalencia homotópica si y sólo si $g$ lo es.

(6) (a) Hallar $f : X \to Y$ tal que $f$ tenga inversa homotópica a izquierda pero no a derecha y viceversa.
(b) Probar que si $f : X \to Y$ tiene inversa homotópica a izquierda y a derecha entonces es equivalencia homotópica.

(7) Probar que $f : X \to Y$ es equivalencia homotópica si y sólo si existen $g, h : Y \to X$ tales que $fg$ y $hf$ son equivalencias homotópicas.

(8) Probar que $i : X \to CX$ es una inclusión cerrada.

(9) Probar que $CX$ es contráctil para todo espacio $X$.

(10) Sea $X$ el peine

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1, x = 0 \text{ ó } x = 1/n \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y)/y = 0, \ 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

Sea $x_0 = (0, 1) \in X$. Probar que $X$ es contráctil pero no existe una homotopía entre $1_X$ y $c_{x_0}$ que sea relativa a $x_0$ (es decir que toda homotopía entre la identidad y la constante $x_0$ va moviendo al punto durante la deformación).

(11) Sea $X$ el espacio que se obtiene de pegar dos copias del peine identificando el punto $(0, 1)$ de ambas copias (es decir, $X$ es el cociente de la unión disjunta de dos copias del peine identificando el punto $(0, 1)$ de una copia con el mismo punto de la otra copia). Probar que $X$ no es contráctil.

(12) Sea $A$ un subespacio discreto de $X$ con más de un punto. Probar que si $X$ es conexo entonces $A$ no es retracto débil de $X$.

(13) Sea $A$ el peine y sea $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Probar que $i : A \to I^2$ es un retracto por deformación débil pero no es un retracto por deformación fuerte.

(14) Sea $X$ un subespacio convexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $x_0$ un punto de $X$. Probar que $\{x_0\}$ es un retracto por deformación fuerte de $X$.

(15) Sea $f : X \to Y$ continua. Definimos el cono de $f$ como el espacio topológico $Cf$ que se obtiene tomando la unión disjunta de $CX$ e $Y$ y luego identificando los puntos $(x,0) \in CX$ con los puntos $f(x) \in Y$ (intuitivamente pegamos la base del cono $CX$ al espacio $Y$ usando la $f$). Denotamos con $\overline{(x,t)}$ y con $\overline{y}$ las clases de los elementos en el cociente.
  (a) Probar que $j : Y \to Cf$ definida por $j(y) = \overline{y}$ es subespacio.
  (b) Sea $g : Y \to Z$ continua. Probar que $gf : X \to Z$ es null homotópica si y sólo si $g$ se extiende continuamente a $Cf$ (es decir, existe $\overline{g} : Cf \to Z$ tal que $\overline{g}j = g$).

(16) Probar que $X$ es contráctil si y sólo si $i : X \to CX$ es un retracto.

(17) Sea $f : X \to Y$ continua. Definimos el cilindro de $f$ como el espacio topológico $Z_f$ que se obtiene tomando la unión disjunta de $IX$ con $Y$, identificando luego los puntos $(x,0)$ con $f(x)$ ( es decir, pegamos la base del cilindro de $X$ con el espacio $Y$ usando la $f$) y denotamos $\overline{(x,t)}$, $\overline{y}$ las clases de los elementos en el cociente $Z_f$. Sea $i : X \to Z_f$ la inclusión $i(x) = \overline{(x,1)}$ y sea $j : Y \to Z_f$ la inclusión $j(y) = \overline{y}$.
  (a) Probar que $r : Z_f \to Y$ definida por $r(\overline{(x,t)}) = f(x)$ y $r(\overline{y}) = y$ está bien definida y es continua.
  (b) Probar que $j : Y \to Z_f$ es equivalencia homotópica con inversa $r$.