Topología

Segundo Cuatrimestre 2003

Práctica 6

Grupoide Fundamental, Fibraciones y Revestimientos

Notación: $H : \omega \underset{p}{\simeq} \omega'$ denota una homotopía de caminos entre ω y ω'.

(1) Sean $H : \omega_1 \underset{p}{\simeq} \omega_2,\ G : \omega_2 \underset{p}{\simeq} \omega_3$ y $F : \omega_1' \underset{p}{\simeq} \omega_2',\ M : \omega_2' \underset{p}{\simeq} \omega_3'$ con $\omega_i(1) = \omega_i'(0)$. Probar que

$$(H + G) * (F + M) = (H * F) + (G * M)$$

(2) Probar que un grupoide es trivial si y sólo si es equivalente al grupoide singleton (grupoide de un solo elemento y una sola flecha).

(3) Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea $\Omega X = \{\omega : I \to X\ ,\ \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$ con la topología del subespacio de la compacto abierta. Probar que $\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega X)$.

(4) Sea X espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea S^1 la esfera uno dimensional y sea $s \in S^1$ un punto cualquiera. Sea

$$[(S^1, s), (X, x_0)] = \{[f]/\ f : S^1 \to X \text{ continua tal que } f(s) = x_0\}$$

donde $[f] = [g]$ si $f \simeq_{\{s\}} g$. Probar que $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, s), (X, x_0)]$.

(5) Sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos en un espacio arco-conexo X. Probar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos $x_0 \xrightarrow{\omega,\omega'} x_1$ se tiene $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$.

(6) Sea $A \subset X$ un subespacio.

(a) Probar que si A es un retracto de X con retracción $r : X \to A$, entonces para cualquier $a_0 \in A$ se tiene que $r_* : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$ es un epimorfismo e $i_* : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ es un monomorfismo (donde $i : A \to X$ es la inclusión).

(b) Probar que si A es un retracto por deformación (débil o fuerte) entonces $\pi_1(A)$ y $\pi_1(X)$ son grupoides equivalentes. En particular para todo $a_0 \in A$ se verifica que $\pi_1(A, a_0) = \pi_1(X, a_0)$.

(7) Sea G un grupo topológico con multiplicación $\cdot$ y elemento neutro x_0. Consideremos $\Omega(G, x_0)$. Dados $f, g \in \Omega(G, x_0)$, definamos el lazo $f \odot g$ por $(f \odot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$.

(a) Mostrar que con $\odot$, $\Omega(G, x_0)$ es un grupo.

(b) Mostrar que $\odot$ induce una nueva operación de grupo en $\pi_1(G, x_0)$, que por abuso notaremos $\odot$.

(c) Probar que $\odot$ coincide con $*$ en $\pi_1(G, x_0)$. (Sugerencia: considerar $(f * e_{x_0}) \odot (e_{x_0} * g)$.)

(d) Deducir que $\pi_1(G, x_0)$ es abeliano.

(8) Probar que las fibraciones forman una clase buena de funciones.

(9) Sean X, Y espacios topológicos. Probar que la proyección $p_X : X \times Y \to X$ es una fibración con fibra Y. Probar además que si Y es discreto, entonces la proyección es un revestimiento.

(10) Probar que si $p : E \to B$ es una fibración con luc y B es arco conexo entonces todas las fibras son homeomorfas.

(11) Probar que las siguientes funciones son revestimientos:

(a) $p : S^1 \to S^1,\ p(x) = x^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

(b) $p : S^n \to \mathbb{P}^n$ la proyección al plano proyectivo.

(c) G grupo topológico, H un subgrupo discreto de G y $p : G \to G/H$ la proyección al cociente.

(12) Probar que $p : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$ definida por $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$ es un homeo local pero no es revestimiento.

(13) Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x \in \mathbb{Z} \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$ y sea $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1\ ,\ z = 1 \text{ ó } w = 1\}$ (donde S^1 lo vemos como subespacio de $\mathbb{C}$). Probar que $p : E \to B$ definida por $p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ es un revestimiento.

(14) Sea X espacio topológico. Probar que $f : X \to S^1$ puede levantarse a una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $p\tilde{f} = f$ (donde $p : \mathbb{R} \to S^1$ es la función definida por $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$) si y sólo si f es null homotópica.

(15) Sea $p: E \to B$ una fibración. Sean ω_1, ω_2 dos caminos en B con $\omega_1(1) = \omega_2(0)$; Sean $\widetilde{\omega_1}, \widetilde{\omega_2}$ levantados de ellos tales que $\widetilde{\omega_1}(1) = \widetilde{\omega_2}(0)$. Mostrar que $\widetilde{\omega_1} * \widetilde{\omega_2}$ es un levantado de $\omega_1 * \omega_2$.

(16) Sea $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ el revestimiento usual del toro. Sea ω el camino

$$w(t) = ((\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t), (\cos 4\pi t, \operatorname{sen} 4\pi t)).$$

Dibujar w en el toro inmerso en $\mathbb{R}^3$, y calcular y dibujar un levantamiento $\tilde{\omega}$.

(17) Sean $f, g : S^1 \to S^1$ dadas por $f(z) = z^n$, $g(z) = 1/z^n$, donde $n \in \mathbb{N}$. Calcular $f_*, g_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$.

(18) Sea $p : E \to B$ una fibración. Probar que si B es arco conexo y alguna fibra E_b es arco conexa, entonces E es arco conexo.

(19) Sea $p : E \to B$ una fibración. Sea $b \in B$ y sea $e_0 \in E_b$. Probar que si B es simplemente conexo, entonces la inclusión de la fibra E_b en E induce un epimorfismo $i_* : \pi_1(E_b, e_0) \to \pi_1(E, e_0)$.

(20) Sea $p : E \to B$ una fibración. Sea $b \in B$ y $e \in E_b$. Probar que si la fibra E_b es simplemente conexa entonces $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ es un isomorfismo.

(21) Sea $p : E \to B$ un revestimiento, con B conexo. Probar que si E_{b_0} tiene k elementos para algún $b_0 \in B$, entonces E_b tiene k elementos para todo $b \in B$. En ese caso E se llama un revestimiento de B de k hojas .

(22) Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ revestimientos.
  (a) Probar que si Y_z es finito para cada $z \in Z$, entonces $q \circ p : X \to Z$ es un revestimiento.
  (b) Probar que el teorema falla si Y_z no es finito.

(23) Sea $p : E \to B$ un revestimiento. Supongamos que B es conexo y localmente conexo. Mostrar que si C es una componente de E, entonces $p|_C : C \to B$ es un revestimiento.

(24) Si un grupo G actúa en un espacio topológico X, decimos que la acción es propiamente discontinua si para todo $x \in X$ existe $U \subset X$ abierto, $x \in U$ tal que $g \cdot U \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G$, $g \neq e$. Decimos que la acción es libre si $g \cdot x \neq x$ para todo $x \in X$, y todo $g \in G$, $g \neq e$.
  (a) Si G es un grupo finito que actúa libremente sobre un espacio X Hausdorff, entonces la acción de G en X es propiamente discontinua.
  (b) Probar que si G actúa en X y la acción es propiamente discontinua, entonces la proyección $p : X \to X/G$ es un revestimiento.
  (c) Verificar que el item (b) del ejercicio 11 es un ejemplo de esta construcción.
  (d) Sea $X \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $X = \mathbb{R} \times [0, 1]$. Sea $G \subset \operatorname{Aut}(X)$ el subgrupo generado por φ, donde $\varphi(z) = \overline{z} + 1 + i$. Probar que la acción de G en X es propiamente discontinua, y que X/G es homemomorfo a la banda de Möbius.

(25) Calcular $\pi_1(X, x_0)$ en cada uno de los siguientes casos (como son todos arco-conexos elegir su punto base favorito). Algunos ejercicios se pueden encarar de distintas maneras: buscar retractos por deformación, revestimientos apropiados, acciones propiamente discontinuas.
  (a) $X = S^1 \times [0, 1]$ (un cilindro).
  (b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$ (un cilindro infinito).
  (c) $X = M$, la banda de Möbius.
  (d) $X = T = S^1 \times S^1$, el toro usual. Dibujar los generadores en una inmersión de T en $\mathbb{R}^3$.
  (e) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una variedad lineal de dimensión 1 o 2 (o sea, una recto o un plano).