Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2003

PRÁCTICA 7

APLICACIONES DEL TEOREMA DE VAN KAMPEN - CLASIFICACIÓN DE REVESTIMIENTOS

(1) Sea $X = A \cup B$ con A y B cerrados en X simplemente conexos y localmente arco conexos, tal que $A \cap B$ consiste en un solo punto. Probar que si $p : E \to X$ es un revestimiento, entonces p es homeomorfismo.

(2) Supongamos que $X = U_1 \cup U_2$ con U_i abiertos y arco conexos, y con $U_1 \cap U_2$ no vacío y arco conexo. Denotemos con $\varphi_1 : U_1 \cap U_2 \to U_1$ y $\psi_1 : U_1 \to X$ las inclusiones.

(a) Probar que si U_2 es simplemente conexo, entonces $\psi_{1*} : \pi_1(U_1, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es un epimorfismo.

(b) Probar que si U_2 y $U_1 \cap U_2$ son simplemente conexos, entonces $\psi_{1*} : \pi_1(U_1, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es un isomorfismo.

(3) Sea X simplemente conexo y localmente arco conexo y sean $f, g : X \to S^1$. Probar que f y g son homotópicas.

(4) Probar que toda función continua del plano proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ a S^1 es null homotópica ($n \geq 2$).

(5) Probar que no existe $f : S^n \to S^1$ tal que $f(-x) = -f(x)$ ($n \geq 2$).

(6) (a) Sea X_n la unión de n circunferencias que se intersecan (dos a dos y de cualquier modo) en un único punto x_0. Probar que $\pi_1(X_n, x_0)$ es el grupo libre con n generadores.

(b) Sea $Y_n \subset \mathbb{C}$ el siguiente conjunto:

$$Y_n = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - j + 1/2| = 1/2, \ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Calcular $\pi_1(Y_n, 0)$.

(7) Calcular los grupos fundamentales de

(a) $T \setminus \{y\}$, el toro sin un punto.

(b) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{y\}$, el plano proyectivo sin un punto.

(c) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, la unión por un punto de dos copias del plano proyectivo.

(d) $S^n \vee S^n$ la unión por un punto de dos copias de S^n.

(e) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

(f) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$.

(g) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times 0)$.

(h) $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

(8) Sea $X = I \times I / \sim$ donde $(x, y) \sim (x', y')$ si y sólo si $(x = x', y = y')$ o $(\{y, y'\} = \{0, 1\}, x = x')$ o $(\{x, x'\} = \{0, 1\}, \ y + y' = 1)$. Calcular, usando el teorema de Van Kampen, el grupo fundamental de X. (Notar que X es la botella de Klein.)

(9) Sea L_k una variedad lineal en $\mathbb{R}^n$, de dimensión k ($0 \leq k \leq n - 2$). Calcular $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus L_k)$.

(10) Sea C una circunferencia en $\mathbb{R}^3$. Probar que $\pi_1(\mathbb{R}^3 - C) = \mathbb{Z}$ (sugerencia: deformar $\mathbb{R}^3 - C$ en $S^2 \vee S^1$).

(11) Sean X_1, X_2 dos copias del disco D^2, y sean Y_1, Y_2 sus respectivos bordes. Sea X el cociente de la unión disjunta de X_1 y X_2 tras identificar Y_1 con Y_2 de la siguiente forma: $e^{2\pi i t} \in Y_1$ se identifica con $e^{2\pi i n t} \in Y_2$, donde $n \in \mathbb{N}$ está fijo. Probar que X es simplemente conexo.

(12) Consideremos el toro $T = S^1 \times S^1$. Sabemos que su grupo fundamental es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y que su revestimiento universal es el producto de dos copias del revestimiento universal de S^1. Dados los siguientes subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hallar el revestimiento correspondiente.

(a) El subgrupo generado por el elemento $(1, 0)$.

(b) El subgrupo generado por el elemento $(1, 1)$.

(c) El subgrupo $H = \{(2n, 2m) : \ m, n \in \mathbb{Z}\}$.

(13) Sea B un espacio topológico. Probar que si B tiene un revestimiento universal, entonces B es semilocalmente simplemente conexo.

(14) Sea A_n una circunferencia de radio $1/n$ tangente al eje y en el origen. Sea $X = \bigcup A_n$.
  (a) Mostrar que X no es semilocalmente simplemente conexo.
  (b) Sea $C(X)$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por la unión de todos los segmentos de X con el punto $(0, 0, 1)$ ($C(X)$ es homeomorfo al cono de X). Mostrar que $C(X)$ es semilocalmente simplemente conexo en el origen pero no localmente simplemente conexo allí.

(15) Sean E y B espacios arco conexos y localmente arco conexos. Sea $p : E \to B$ un revestimiento. Un homeomorfismo $h : E \to E$ se llama una transformación Deck si $p \circ h = p$.
  (a) Sean $e_0, e_1 \in E_{b_0}$. Mostrar que existe una transformación Deck h tal que $h(e_0) = e_1$ si y sólo si $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, e_1))$. Mostrar que de existir, h es única.
  (b) Si $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es normal en $\pi_1(B, b_0)$, entonces $p : E \to B$ se dice un revestimiento regular. Mostrar que en este caso, el grupo de transformaciones Deck de E es isomorfo al cociente $\pi_1(B, b_0)/H_0$.
  (c) Si $p : E \to B$ es el revestimiento universal de B, qué se puede decir sobre el grupo de transformaciones Deck de E?

(16) Sea $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ el revestimiento usual del toro. Describir el grupo de transformaciones Deck de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.