**Topología**
Segundo Cuatrimestre 2003
Práctica 8
Homología

(1) Sea $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ una sucesión exacta. Probar que son equivalentes:
  (a) $f$ es sección.
  (b) $g$ es retracción.
  (c) Existe un isomorfismo $\phi : N \to M \oplus P$ tal que $\phi f(m) = (m, 0)$ y $g\phi^{-1}(m, p) = p$.

(2) Probar que todo grupo abelinao es cociente de un grupo abeliano libre.

(3) Hallar todos los grupos abelianos posibles $M$ en las siguientes sucesiones exactas:
  (a) $0 \to \mathbb{Z}_2 \to M \to \mathbb{Z}_4 \to 0$
  (b) $0 \to \mathbb{Z}_m \to M \to \mathbb{Z}_n \to 0$
  (c) $0 \to Z_m \to M \to \mathbb{Z}^n \to 0$

(4) (Lema de los 5) Dado el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & M_5 \arrow[d, "e"'] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

Probar que
  (a) Si $b$ y $d$ son mono y $a$ es epi, entonces $c$ es mono.
  (b) Si $b$ y $d$ son epi y $e$ es mono, entonces $c$ es epi.
  (c) Concluir que si $a, b, d$ y $e$ son iso, entonces $c$ es iso.

(5) (Lema de la serpiente) Probar que un diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 &
\end{tikzcd}$$

induce una sucesión exacta

$$\ker(a) \to \ker(b) \to \ker(c) \to \operatorname{coker}(a) \to \operatorname{coker}(b) \to \operatorname{coker}(c)$$

Además, si $M_1 \to M_2$ es mono, entonces $\ker(a) \to \ker(b)$ también y si $N_2 \to N_3$ es epi, también lo es $\operatorname{coker}(b) \to \operatorname{coker}(c)$.

(6) Sea $(C_*, d)$ un complejo. Probar que son equivalentes:
  (a) $C_*$ es exacto.
  (b) $C_*$ es acíclico.
  (c) $0 \to C_*$ es un quasi isomorfismo ( 0 denota el complejo que en cada lugar tiene el módulo 0).

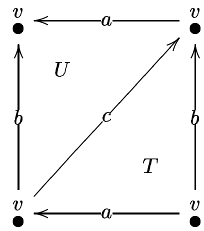
(7) Sean $(C_*, d)$ y $(D_*, d')$ complejos. Probar que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que $H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D)$.

(8) Sea $s$ un 2-simplex. Calcular la homología simplicial de $s$ y de $\dot{s}$ (el borde de $s$). (Observarción: con esto se está calculando la homología de $D^2$ y $S^1$).

(9) Calcular la homología simplicial del tetraedro (borde de un 3-simplex). (Observación: se está calculando la homología de $S^2$).

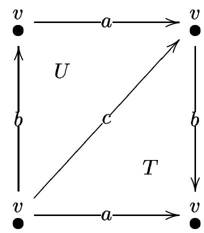
(10) Calcular la homología de los siguientes $\Delta$-complejos:

(a) Toro




identificando las caras opuestas ($a$ con $a$ y $b$ con $b$ en la misma dirección).

(b) Botella de Klein




identificando las caras opuestas ($a$ con $a$ en la misma dirección y $b$ con $b$ en direcciones opuestas).

(c) El paracaidas triangular que se obtiene tomando un 2-simplex e identificando los 3 vértices en uno solo.

(d) El espacio $X$ que se obtiene de un n-simplex identificando todas las caras de la misma dimensión (es decir, $X$ tiene un k-simplex por cada $k \leq n$).

(11) Sea $X$ espacio topológico y $\{X_k\}$ familia de componentes arco conexas de $X$. Probar que $H_n(X) = \oplus H_n(X_k)$.

(12) Probar que si $i : A \to X$ es un retracto entonces $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es sección. Más aún, $H_n(X) \simeq H_n(A) \oplus H_n(X, A)$.

(13) Sea $A$ un subespacio de $X$. Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si $A$ interseca todas las componentes arco conexas de $X$.

(14) Probar que el grupo de homología relativa $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ es un grupo abeliano libre y calcular una base.

(15) Probar que una función continua de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ induce un morfismo $f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ $\forall n$

(16) Probar que una homotopía de pares $h : f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ induce una homotopía $\phi : f_* \simeq g_*$ entre los complejos relativos y por lo tanto $f_* = g_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

(17) Sea $X$ espacio topológico y sean $A, B \subseteq X$ subespacios tales que $B \subseteq A$. Probar que existe una s.e. larga

$$\ldots \to H_n(A, B) \to H_n(X, B) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, B) \to \ldots$$

inducida por las inclusiones.

(18) Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que $(X_i, x_i)$ es un par bueno para todo $i$, es decir existe un entorno abierto $U_i$ de $x_i$ tal que la inclusión del punto en el abierto es un retracto por deformación fuerte. Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos bases $x_i$, probar que $\tilde{H}_n(X) = \oplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.

(19) Calcular $\tilde{H}_n(\bigvee\limits_{i \in \Lambda} S^k)$.

(20) Sea $Y$ un espacio contráctil y sea $y \in Y$. Probar que $H_n(X \times Y, X \times \{y\}) = 0$ para todo espacio $X$.

(21) Sea $X$ un espacio topológico y sea $p \in S^n$. Probar que

$$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) \simeq H_{q-n}(X)$$

y que

$$H_q(X \times S^n) \simeq H_{q-n}(X) \oplus H_q(X)$$

(Sugerencia: usar ejercicio anterior e inducción en $n$).

(22) Calcular $H_q(S^n \times S^m)$ y $H_q(T^n)$, donde $T^n$ es el toro $n$-dimensional.

(23) Sean $x_1, \ldots, x_m$ puntos de $\mathbb{R}^n$. Calcular $H_q(\mathbb{R}^n - \{x_1, \ldots, x_m\})$.

(24) Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos no vacíos. Probar que si $U$ y $V$ son homeomorfos, entonces $n = m$.

(25) Dada $f : S^n \to S^n$, el morfismo $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_n(S^n)$ es un endomorfismo de $\mathbb{Z}$ y por lo tanto tiene la forma $f_*(m) = a.m$ para algún $a \in \mathbb{Z}$ (que depende sólo de $f$). Se define el grado de $f$ como $deg(f) = a$. Probar que
   (a) $deg(1_{S^n}) = 1$.
   (b) Si $f$ no es suryectiva entonces $deg(f) = 0$.
   (c) si $f \simeq g$ entonces $deg(f) = deg(g)$.
   (d) $deg(fg) = deg(f).deg(g)$.
   (e) Si $f$ es equivalencia homotópica entonces $deg(f) = 1$ o $deg(f) = -1$.
   (f) Si $f$ es una reflexión ( es decir $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1})$) entonces $deg(f) = -1$.
   (g) Si $f(x) = -x$ entonces $deg(f) = (-1)^{n+1}$.
   (h) Si $f$ no tiene puntos fijos entonces $deg(f) = (-1)^{n+1}$.

(26) Sea $X$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Probar que toda función $f : X \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva es abierta. (Sugerencia: teorema de separación de Jordan).

(27) Sea $X$ un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Probar que si existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva, entonces $m \geq n$.