Topología

Segundo Cuatrimestre 2003

Práctica 1

Bases y sub-bases de topologías

(1) Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una colección de topologías en X.
  (a) Probar que $\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{T}_\alpha$ una topología en X?
  (b) Probar que existe una única topología en X que es la menor de todas las topologías que contienen a todas las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ ($\alpha\in A$), y una única topología en X que es la mayor de todas las topologías contenidas en cada una de las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ ($\alpha \in A$).
  (c) Si $X=\{a,b,c\}$,$\mathcal{T}_1=\{\emptyset, X,\{a\},\{a,b\}\}$ y $\mathcal{T}_2=\{\emptyset, X,\{a\},\{b,c\}\}$, encontrar las topologías mencionadas en (b).

(2) Probar que si $\mathcal{B}$ es base de una topología en X, entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{B}$. Probar que vale lo mismo si $\mathcal{B}$ es una sub-base.

(3) Sea $(X,<)$ un conjunto ordenado. Sea $\mathcal{S}=\{S_x:\ x\in X\}$ y sea $\mathcal{R}=\{R_x:\ x\in X\}$, donde $R_x=\{y\in X:\ x<y\}$. Probar que $\mathcal{S}\cup\mathcal{R}$ son una sub-base para la topología del orden en X.

(4) Considerar las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:
$\mathcal{B}_1=\{(a,b):\ a<b\}$,
$\mathcal{B}_2=\{[a,b):\ a<b\}$,
$\mathcal{B}_3=\{(a,b]:\ a<b\}$,
$\mathcal{B}_4=\mathcal{B}_1\cup\{B\setminus K:\ B\in\mathcal{B}_1\}$, donde $K=\{1/n:\ n\in\mathbb{N}\}$,
$\mathcal{B}_5=\{(a,+\infty):\ a\in\mathbb{R}\}$, donde $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:\ x>a\}$,
$\mathcal{B}_6=\{(-\infty,a):\ a\in\mathbb{R}\}$, donde $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}:\ x<a\}$,
$\mathcal{B}_7=\{B:\ \mathbb{R}\setminus B \text{ es finito}\}$.
  (a) Probar que cada $\mathcal{B}_i$ es una base para una topolología en $\mathbb{R}$.
  Notación: Notaremos $\mathbb{R}_l$ al espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología definida por $\mathcal{B}_2$.
  (b) Comparar las siete topologías entre si.
  (c) Probar que $\mathcal{B}_5\cup\mathcal{B}_6$ es una sub-base que genera la misma topología que $\mathcal{B}_1$.

(5) **Topología definida por filtro de entornos.** Supongamos que tenemos para cada $x\in X$ un subconjunto (no vacío) $\mathcal{F}_x\subset\mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades:
E1: Dado $A\in\mathcal{F}_x$, entonces $x\in A$.
E2: Dado $B\subset A$, $B\in\mathcal{F}_x$, entonces $A\in\mathcal{F}_x$.
E3: Dados A, $B\in\mathcal{F}_x$, entonces $A\cap B\in\mathcal{F}_x$.
E4: Dado $A\in\mathcal{F}_x$, existe $B\subset A$ tal que $B\in\mathcal{F}_x$, y $B\in\mathcal{F}_y$ para cada $y\in B$.
  Probar:
  (a) $\mathcal{T}=\{B\in\mathcal{P}(X): B\in\mathcal{F}_x\ \forall x\in B\}\cup\emptyset$ es una topología en X (observar que no se necesita la propiedad $E4$). Esta topología se llama la topología definida por los filtros de entornos de sus puntos.
  (b) Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico, los conjuntos

$$\mathcal{F}_x=\{A\in\mathcal{P}(X): x\in U\subset A \text{ para algún } U\in\mathcal{T}\}$$

  verifican los axiomas E1-E4. Los conjuntos $\mathcal{F}_x$ se llaman filtros de entornos del punto x.
  (c) El filtro de entornos de una topología definida por filtro de entornos coincide con éste.
  (d) Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico, la topología definida por los filtros de entornos de X coincide con $\mathcal{T}$.

(6) **Topologías definidas por operador de clausura.**
  Un operador $\overline{(\cdot)}:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ que verifica las siguientes propiedades:
C1: $\overline{\emptyset}=\emptyset$,

C2: $A \subseteq \overline{A}$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$,

C3: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$,

C4: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$,

se llama un operador de clausura.

(a) Probar que si se tiene un operador de clausura, se tiene en X una topología definida por

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overline{X \setminus U} = X \setminus U.$$

Observación: Lo que estamos haciendo es definir la topología por sus cerrados, esto es,

$$F \text{ es cerrado} \iff \overline{F} = F.$$

(b) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supseteq A} F \qquad \text{donde } F \text{ es cerrado}$$

define un operador de clausura.

(c) Probar que si se parte de un operador clausura en un espacio X y se construye una topología como en (a), el operador clausura definido a partir de esta topología (como en (b)) es el original.

(d) Probar que si se parte de un espacio topológico X y se define un operador clausura como en (b), la topología definida a partir de este operador (como en (a)) es la original de X.

(7) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \{x \in X : \ U \cap A \neq \emptyset \ \ \forall\, U \in \mathcal{T},\ x \in U\}$$

define un operador de clausura. Probar que este operador de clausura coincide con el definido en la parte (b) del ejercicio anterior, (en otras palabras, probar que para todo $A \subset X$,

$$\{x \in X : \ U \cap A \neq \emptyset \ \ \forall\, U \in \mathcal{T},\ x \in U\} = \bigcap_{F \supseteq A} F \qquad (\text{donde } F \text{ es cerrado}))$$

(8) Probar que $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$ y mostrar que la inclusión puede ser estricta.

(9) Decidir cuáles de las siguientes igualdades son ciertas, y en caso de ser falsas determinar si se verifica alguna de las inclusiones.

(a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(b) $\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} = \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha}$.

(c) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$.

(10) Considerar el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes subconjuntos de X.

$A = \{(1/n, 0) : \ n \in \mathbb{N}\}$,

$B = \{(1 - 1/n, 1/2) : \ n \in \mathbb{N}\}$,

$C = \{(x, 0) : \ 0 < x < 1\}$,

$D = \{(x, 1/2) : \ 0 < x < 1\}$,

$E = \{(1/2, y) : \ 0 < y < 1\}$.

(11) Considerar las siete topologías definidas en el ejercicio **??**. Determinar la clausura del conjunto $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ en cada una de las topologías.

Redes

(12) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que las redes convergentes verifican las las siguientes propiedades:

R1: Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a la constante.

R2: Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x, entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x.

R3: Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x, entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x.

R4: Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k\in\Gamma_\alpha}$, que converge a $x^\alpha \in X$, y además $(x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x \in X$. Consideremos $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \ \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$ converge a x.

(13) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que la fórmula

$$\overline{A} = \{x \in X : \ \exists (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq A, \ \text{y } x_\alpha \to x\}$$

define un operador de clausura. Probar que la clausura usual coincide con la recién definida.

(14) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathcal{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ. Probar que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x (para la ida, considerar Γ el conjunto de pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$, U entorno abierto de x que contiene a x_α, con el orden $(\alpha, U) \preceq (\beta, V)$ si $\alpha \leq \beta$ y $V \subseteq U$).

Funciones Continuas.

(15) Sean X, Y espacios topológicos. Probar que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \to Y$ es equivalente a pedir que f sea continua

(a) Para todo $x \in X$, y para todo $A \in \mathcal{F}_y$ $(y = f(x))$ existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $f(B) \subseteq A$.

(b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \to x$, se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x)$.

(c) Para todo $A \subseteq X$, $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

(d) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y, $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

(e) Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de Y, $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

(16) Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Sea $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ la función característica de E, esto es,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E \end{cases}$$

Probar que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E (la frontera de E es $\overline{E} \cap \overline{(X \setminus E)}$).

(17) (a) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es un homeomorfismo.

(c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Probar que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

(18) Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.

(a) Probar que el conjunto $\{x \in X : \ f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

(b) Sea $h : X \to Y$ la función

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Probar que h es continua.

(19) Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio topológico X tal que $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

(a) Probar que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.

(b) Probar que si $\mathcal{A}$ es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.

(c) Encontrar un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.

(d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α. Mostrar que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

(20) **Topología de Zariski en k^n (tener en mente $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$).**
Consideremos el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k, $k[x] = k[x_1, \ldots, x_n]$. Para cada subconjunto $S \subseteq k[x]$ definimos el conjunto algebraico dado por S como

$$V(S) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in k^n : \ p(z_1, \ldots, z_n) = 0 \ \forall\, p \in S\}.$$

Verificar las siguientes propiedades
(a) Si $S \subseteq T \subseteq k[x]$, entonces $V(S) \supseteq V(T)$.
(b) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S.
(c) $V(\{0\}) = k^n$, y $V(\{1\}) = \emptyset$.
(d) Si $I, J \subseteq k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.
(e) Si $\{I_a\}_{a\in A}$ es una familia de ideales, entonces $V\left(\bigcup_{a\in A} I_a\right) = \bigcap_{a\in A} V(I_a)$.
Observación: los items (c), (d), (e) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la topología de Zariski de k^n.
(f) Los conjuntos $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$ forman una base para dicha topología.
(g) Los abiertos D_f son densos si f es no nulo.

(21) Caracterizar la topología de Zariski de k. Compararla con la usual en el caso en que $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$.

(22) Comparar la topología de Zariski en k^2 con la topología usual de k^2 ($k = \mathbb{R}$, ó $k = \mathbb{C}$).

Topologías dadas por una métrica

(23) Mostrar que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden del diccionario es metrizable (i.e. existe una métrica tal que la topología que induce la métrica coincide con la dada).

(24) Sea $\mathbb{R}^\omega$ el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en $\mathbb{R}^\omega$ la topologa uniforme de la siguiente manera:
Primero se define en $\mathbb{R}$ la métrica acotada $\overline{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$ (nota: induce la misma topología que la usual). Luego se define en $\mathbb{R}^\omega$ la métrica uniforme como $d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_n\{\overline{d}(a_n, b_n)\}$.
(a) Verificar que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.
(b) Decidir si las siguientes funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^\omega$ son continuas tomando en $\mathbb{R}$ la toplogía usual, y en $\mathbb{R}^\omega$ la topología uniforme.

$$\begin{aligned} f(t) &= (t, 2t, 3t, \ldots), \\ g(t) &= (t, t, t, \ldots), \\ h(t) &= (t, \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{3}t, \ldots). \end{aligned}$$

(c) Decidir si las siguientes sucesiones convergen en $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme.

$$\begin{array}{llll} w_1 = (1,1,1,1,\ldots), & x_1 = (1,1,1,1,\ldots), & y_1 = (1,0,0,0,\ldots), & z_1 = (1,1,0,0,\ldots), \\ w_2 = (0,2,2,2,\ldots), & x_2 = \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots\right), & y_2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\ldots), & z_1 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\ldots), \\ w_3 = (0,0,3,3,\ldots), & x_3 = \left(0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots\right), & y_3 = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,\ldots), & z_3 = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0,\ldots), \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

(d) Calcular la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a la topología uniforme de $\mathbb{R}^\omega$.

(25) Sea $\overline{\rho}$ la distancia uniforme sobre $\mathbb{R}^\omega$. Dado $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega$ y dado $0 < \epsilon < 1$, sea

$$U(x, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon) \ldots$$

(a) Pruebe que $U(x, \epsilon)$ no es igual a la bola $B_{\overline{\rho}}(x, \epsilon)$.
(b) Pruebe que $U(x, \epsilon)$ ni siquiera es abierto en la topología uniforme.
(c) Pruebe que

$$B_{\overline{\rho}}(x, \epsilon) = \cup_{\delta<\epsilon} U(x, \delta).$$

(26) Sean $(a_1, a_2, \ldots), (b_1, b_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega$ dos sucesiones tales que $a_i \neq 0$ para todo i. Definamos $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ por la fórmula

$$h((x_1, x_2, \ldots)) = (a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2, \ldots),$$

Dar condiciones sobre los números a_i, b_i para que h sea continua. ¿Y para que h sea un homeomorfismo?