

Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 1

Bases y sub-bases de topologías

- 1) Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de topologías en X .
 - a) Probar que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X . ¿Es $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ una topología en X ?
 - b) Probar que existe una única topología en X que es la menor de todas las topologías que contienen a todas las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ ($\alpha \in A$), y una única topología en X que es la mayor de todas las topologías contenidas en cada una de las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ ($\alpha \in A$).
 - c) Si $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ y $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, encontrar las topologías mencionadas en (b).
- 2) Probar que si $\mathcal{B}$ es base de una topología en X , entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{B}$. Probar que vale lo mismo si $\mathcal{B}$ es una sub-base.
- 3) Sea $(X, <)$ un conjunto totalmente ordenado. Sea $\mathcal{S}_1 = \{(-\infty, x) : x \in X\}$ y sea $\mathcal{S}_2 = \{(x, \infty) : x \in X\}$, donde $(-\infty, x) = \{y \in X : y < x\}$ y $(x, +\infty) = \{y \in X : x < y\}$. Probar que $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ es una sub-base para la topología del orden en X .
- 4) Considerar las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:
$$\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a < b\},$$
$$\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a < b\},$$
$$\mathcal{B}_3 = \{(a, b] : a < b\},$$
$$\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_1\}, \text{ donde } K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$
$$\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}.$$
$$\mathcal{B}_7 = \{B : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}.$$
 - a) Probar que cada $\mathcal{B}_i$ es una base para una topología en $\mathbb{R}$.

Notación: Notaremos $\mathbb{R}_i$ al espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología definida por $\mathcal{B}_i$.
 - b) Comparar las siete topologías entre sí.
 - c) Probar que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una sub-base que genera la misma topología que $\mathcal{B}_1$.

5) **Topología definida por filtro de entornos.** Supongamos que tenemos para cada $x \in X$ un subconjunto (no vacío) $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{P}(X)$ con las siguientes propiedades:

E1: Dado $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in A$.

E2: Dado $B \subset A$, $B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \in \mathcal{F}_x$.

E3: Dados $A, B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$.

E4: Dado $A \in \mathcal{F}_x$, existe $B \subset A$ tal que $B \in \mathcal{F}_x$, y $B \in \mathcal{F}_y$ para cada $y \in B$.

Probar:

a) $\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{F}_x \forall x \in B\} \cup \emptyset$ es una topología en X (observar que no se necesita la propiedad E4). Esta topología se llama la topología definida por los filtros de entornos de sus puntos.

b) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, los conjuntos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : x \in U \subset A \text{ para algún } U \in \mathcal{T}\}$$

verifican los axiomas E1-E4. Los conjuntos $\mathcal{F}_x$ se llaman filtros de entornos del punto x .

c) El filtro de entornos de una topología definida por filtro de entornos coincide con éste.

d) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la topología definida por los filtros de entornos de X coincide con $\mathcal{T}$.

6) **Topologías definidas por operador de clausura.**

Un operador $\overline{(\cdot)} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ que verifica las siguientes propiedades:

C1: $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

C2: $A \subseteq \overline{A}$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$,

C3: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$,

C4: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$,

se llama un operador de clausura.

a) Probar que si se tiene un operador de clausura, se tiene en X una topología definida por

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overline{X \setminus U} = X \setminus U.$$

Observación: Lo que estamos haciendo es definir la topología por sus cerrados, esto es,

$$F \text{ es cerrado} \iff \overline{F} = F.$$

- b) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supseteq A} F \quad \text{donde } F \text{ es cerrado}$$

define un operador de clausura.

- c) Probar que si se parte de un operador clausura en un espacio X y se construye una topología como en a), el operador clausura definido a partir de esta topología (como en b)) es el original.
- d) Probar que si se parte de un espacio topológico X y se define un operador clausura como en b), la topología definida a partir de este operador (como en a)) es la original de X .

- 7) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{T}, x \in U\}$$

define un operador de clausura. Probar que este operador de clausura coincide con el definido en la parte (b) del ejercicio anterior, (en otras palabras, probar que para todo $A \subset X$,

$$\{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{T}, x \in U\} = \bigcap_{F \supseteq A} F \quad (\text{donde } F \text{ es cerrado}))$$

- 8) Probar que $\bigcup_{\alpha} \overline{A_{\alpha}} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}$ y mostrar que la inclusión puede ser estricta.
- 9) Decidir cuáles de las siguientes igualdades son ciertas, y en caso de ser falsas determinar si se verifica alguna de las inclusiones.
- a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- b) $\overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}$.
- c) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$.
- 10) Considerar el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes subconjuntos de X .
- $A = \{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,
- $B = \{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,
- $C = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,
- $D = \{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,
- $E = \{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.
- 11) Considerar las siete topologías definidas en el ejercicio 4. Determinar la clausura del conjunto $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ en cada una de las topologías.

Topología subespacio en $Z \subseteq X$ y topología producto en $X \times Y$.

Si $(X, \mathcal{T}_X)$ es un espacio topológico y $Z \subseteq X$ es un subconjunto de X , se define la topología subespacio en Z como

$$\mathcal{T}_Z = \{U \cap Z : U \in \mathcal{T}_X\}.$$

$(Z, \mathcal{T}_Z)$ se llama un subespacio de X .

Si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es otro espacio topológico, se define la topología producto en el producto cartesiano $X \times Y$ como la topología que tiene como base de abiertos a los conjuntos de la forma $U \times V$ donde $U \in \mathcal{T}_X$ y $V \in \mathcal{T}_Y$.

- 12) Probar que si Y es un subespacio de X , y A es un subconjunto de Y , entonces la topología de A como subespacio de Y coincide con la topología de A como subespacio de X .
- 13) Sea $(X, <)$ un conjunto totalmente ordenado, visto como espacio topológico con la topología del orden y sea $Y \subset X$ un subconjunto. En Y podemos considerar dos topologías: la del subespacio y la del orden (ya que es un conjunto ordenado). Compararlas.
- 14) Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice abierta si $f(U)$ es abierto en Y para todo U abierto en X . Probar que $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ son abiertas.
- 15) Probar que la topología del orden del diccionario en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}_d$ es la topología discreta en $\mathbb{R}$. Comparar con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.
- 16) Sea $\mathbb{R}_l$ definido por la base $\mathcal{B}_2$ del ejercicio 4. Sea L una recta en el plano. Describir la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.
- 17) Sea I el subespacio $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$. Comparar la topología producto en $I \times I$ con la topología del orden del diccionario en $I \times I$ y con la topología $I_d \times I$ donde I_d denota a I con la topología discreta.
- 18) Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluir que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y , entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.
- 19) Probar que el producto de espacios Hausdorff es Hausdorff, y que un subespacio de un espacio Hausdorff es Hausdorff.
- 20) Probar que X es Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.

21) **Topología de Zariski en k^n (tener en mente $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$).**

Consideremos el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k , $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$. Para cada subconjunto $S \subseteq k[x]$ definimos el conjunto algebraico dado por S como

$$V(S) = \{(z_1, \dots, z_n) \in k^n : f(z_1, \dots, z_n) = 0 \forall f \in S\}.$$

Verificar las siguientes propiedades

- a) Si $S \subseteq T \subseteq k[x]$, entonces $V(S) \supseteq V(T)$.
- b) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S .
- c) $V(\{0\}) = k^n$, y $V(\{1\}) = \emptyset$.
- d) Si $I, J \subseteq k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.
- e) Si $\{I_a\}_{a \in A}$ es una familia de ideales, entonces $V(\bigcup_{a \in A} I_a) = \bigcap_{a \in A} V(I_a)$.

Observación: los items c), d), e) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la topología de Zariski de k^n .

- f) Sea para $f \in k[x]$ el abierto $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$. Probar que la familia $\mathcal{B} = \{D_f : f \in k[x]\}$ es una base para dicha topología.
- g) Los abiertos D_f son densos si f es no nulo.

- 22) Caracterizar la topología de Zariski de k . Compararla con la usual en el caso en que $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$.
- 23) Comparar la topología de Zariski en $k \times k$ con la topología producto, considerando a cada copia de k con la topología de Zariski.