Topología

Segundo Cuatrimestre 2005

Práctica 3

Separación.

1) Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología que tiene como base

$$\{(a,b) : \ a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,b) \setminus K : \ a < b \in \mathbb{R}\}$$

donde $K = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Probar que X es T_2 pero no es T_3.

(Sugerencia: no se pueden separar el 0 de K.)

2) Mostrar que si X es T_3, todo par de puntos de X tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

3) Mostrar que si X es T_4, todo par de cerrados disjuntos tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

4) Mostrar que si X es un conjunto ordenado, entonces es T_3 con la topología del orden.

5) Mostrar que si X es un conjunto bien ordenado, entonces es T_4 con la topología del orden. Por lo tanto S_Ω y $\overline{S}_\Omega$ son espacios T_4.

6) Mostrar que un subespacio cerrado de un espacio T_4 es T_4.

7) Mostrar que si $\prod X_\alpha$ es T_i $(0 \leq i \leq 4)$, entonces cada X_α lo es.

8) Sea X un conjunto con dos topologías $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$. Supongamos que $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$. Si X es T_i $(0 \leq i \leq 4)$ con alguna de las topologías, ¿qué se puede decir sobre la otra?

9) Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Supongamos que Y es Hausdorff. Mostrar que $\{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

10) Sea X un espacio regular. Definimos una relación de equivalencia en X por $x \sim y$ si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Probar que la proyección $p : X \to X/_\sim$ es tanto abierta como cerrada, y que $X/_\sim$ es un espacio T_3.

(Sugerencia: Si A es abierto o cerrado en X y $x \in A$ entonces $\overline{\{x\}} \subset A$.)

11) Sea $p : X \to Y$ un cociente. Probar que si p es cerrada y X es normal, entonces Y es normal.

12) Probar que los espacios métricos son normales, mostrando que dados dos cerrados A, B disjuntos, existe una función continua $\varphi : X \to [0,1]$ tal que $\varphi(A) = \{0\}$ y $\varphi(B) = \{1\}$.

(Sugerencia: recordar que si $x \in X$ y $C \subset X$, la función (continua) $d_C(x) = \inf\{d(x,c) : c \in C\}$ verifica $d_C(x) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{C}$. Usar entonces d_A y d_B para armar la función φ.)

13) $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ **no es** $\mathbf{T}_4$**.**

Consideremos en $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ la recta $L = \{(x, -x) : \ x \in \mathbb{R}\}$. La topología de L como subespacio de $\mathbb{R}_l$ es la discreta y L es un cerrado en $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$. Por lo tanto cualquier subconjunto $A \subset L$ es cerrado en $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

Supongamos que $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ es T_4. Entonces para cada $A \subset L$ existen abiertos $U_A, V_A \subset \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ tales que $U_A \cap V_A = \emptyset$, $A \subset U_A$ y $L \setminus A \subset V_A$. Sea D el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ con coordenadas racionales. Definamos una función $\theta : \mathscr{P}(L) \to \mathscr{P}(D)$ (donde $\mathscr{P}$ denota las partes de un conjunto) como sigue:

$$\begin{aligned} \theta(A) &= U_A \cap D \text{ si } A \neq \emptyset \text{ y } A \neq L \\ \theta(\emptyset) &= \emptyset, \\ \theta(L) &= D. \end{aligned}$$

Probar que θ es inyectiva y por lo tanto $\#\mathscr{P}(L) \leq \#\mathscr{P}(D)$. Esto último es una contradicción ya que $\#\mathscr{P}(D) = \#L < \#\mathscr{P}(L)$.

Observación: $\mathbb{R}_l$ es T_4 (es fácil verlo), y por lo tanto T_3. Así, este ejemplo muestra que producto de espacios T_4 no es necesariamente T_4 y que hay espacios T_3 que no son T_4.