Topología

Segundo Cuatrimestre 2005

Práctica 4

Compacidad.

1) Sea X un espacio topológico. Probar que son equivalentes:

   a) X es cuasi-compacto.

   b) Para todo espacio topológico Y, y para todo abierto $W \subset X \times Y$ que verifica $X \times \{y_0\} \subset W$ para $y_0 \in Y$, existe $V \subset Y$ tal que $y_0 \in V$ y $X \times V \subset W$.

   c) Para todo espacio topológico Y, la proyección $\pi_2 : X \times Y \to Y$ es cerrada.

2) *a*) Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías en X. Supongamos que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. ¿La compacidad de alguna de estas topologías implica la compacidad de la otra?

   b) Si X es compacto tanto para $\mathcal{T}$ como para $\mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ o no son comparables.

3) *a*) Probar que en $\mathbb{R}$ con la topología del complemento finito todo subconjunto es cuasi-compacto, pero los nicos cerrados son los conjuntos finitos. Por lo tanto hay conjunto cuasi-compactos que no son cerrados.

   b) ¿Es $[0,1]$ cuasi-compacto como subespacio de $\mathbb{R}$ en la topología

$$\mathcal{T}_c = \{U : \mathbb{R} \setminus A \text{ es numerable o todo } \mathbb{R}\}?$$

   ¿Lo es como subespacio de $\mathbb{R}_l$?

4) Mostrar que si $f : X \to Y$ es continua, donde X es cuasi-compacto e Y es Hausdorff, entonces f es cerrada.

5) *Teorema.* Sea $f : X \to Y$, con Y compacto. Entonces f es continua si y sólo si el gráfico de f,

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\},$$

   es cerrado en $X \times Y$.

   (Sugerencia: Si G_f es cerrado y V es un entorno abierto de $f(x_0)$, encontrar un tubo que contenga a $\{x_0\} \times (Y \setminus V)$ que no corte a G_f.)

Compacidad local. Un espacio topológico se dice localmente compacto si y sólo si para cada $x \in X$ los entornos cuasi-compactos de x forman una base para el filtro de entornos de X.

6) Probar que si X es Hausdorff, X es localmente compacto si y sólo si todo punto x tiene un entorno compacto.

7) Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

8) Mostrar que si $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y todos los X_α, salvo una cantidad finita, son compactos.

9) Sea X un espacio localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es continua, ¿Es $f(X)$ localmente compacto? ¿Y si f es además abierta?

Compactificación de Alexandroff. Si X es un espacio topológico definimos la *compactificación de Alexandroff* como el conjunto $X^* = X \cup \{\infty\}$ donde la topología es la unión de la topología en X y los conjuntos $U \subset X^*$ tales que $X^* \setminus U$ es cuasi-compacto y cerrado en X.

10) *Teorema (Alexandroff).* La compactificación de Alexandroff X^* de un espacio topológico X es un espacio cuasi-compacto y X es un subespacio de X^*.

El espacio X^* es compacto si y sólo si X es Hausdorff y localmente compacto.

Además X es cuasi-compacto si y sólo si ∞ es un punto aislado de X^* (i.e., abierto y cerrado), y por lo tanto X es denso en X^* si y sólo si X no es cuasi-compacto.

11) Sea $\mathbb{N}$ con la topología discreta. Probar que su compactificación de Alexandroff es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}$.

12) Probar que la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a S^n. (Considerar la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$, $p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n)$.)

Variedades topológicas. Un espacio topológico X se dice una variedad topológica de dimensión n si es un espacio Hausdorff en el cada punto tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

13) Probar que S^n y $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ son variedades de dimensión n y que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es una variedad de dimensión $2n$.

14) Probar que el toro y la botella de Klein son variedades de dimensión 2 (se llaman superficies).

15) Sea $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/_\sim$ donde $(x, 0) \sim (y, 1)$ si y sólo si $x = y \neq 0$ (X es una la recta con el origen doble).

Probar que todo punto de X tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}$ pero X no es Hausdorff y por lo tanto no es una variedad.

16) Sea X un G-espacio. Decimos que G actúa *libremente* en X si se verifica que $g \cdot x \neq x$ si $g \neq 1$.

Decimos que la acción es *propiamente discontinua* si se verifica que para todo $x \in X$ existe un abierto U tal que $x \in X$ y tal que $g \cdot U \cap U = \emptyset$ para todo $g \neq 1$.

Probar:

a) Sea X un G-espacio Hausdorff, donde G un grupo finito que actúa libremente en G. Probar que la acción es propiamente discontinua.

b) Sea X es un G-espacio Hausdorff, donde G es un grupo finito. Probar que el espacio cociente X/G es Hausdorff.

c) Deducir que si un grupo finito actúa libremente en una variedad (compacta) de dimensión n, entonces el espacio cociente X/G es también una variedad (compacta) de dimensión n.

d) Volver a probar que el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una variedad de dimensión n.

17) Sea g un número natural. Consideramos un disco cerrado $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ y g discos cerrados disjuntos $D_1, \ldots, D_g$ contenidos en el interior de D_0. Denotemos D_i° el interior de D_i y definamos

$$D(g) = D_0 - \bigcup_{i=1}^{g} D_i^\circ$$

Sea $X = D(g) \times \{0\} \cup D(g) \times \{1\}$ la unión disjunta de dos copias de $D(g)$. Sea $S(g)$ el conjunto cociente de X por la relación de equivalencia generada por $(x, 0) \sim (x, 1)$ si x pertenece al borde de alguno de los D_i, $i = 0, 1, \ldots, g$.

Demostrar:

a) $S(g)$ es una variedad topológica compacta de dimensión dos

b) Si modificamos los radios y posición de los discos D_i obtenemos espacios homeomorfos.

c) $S(g) + S(h)$ es homeomorfa a $S(g + h)$
(+ es cirugía o costura: Si X e Y son variedades de dimensión n se eligen $D_X \subset X$ y $D_Y \subset Y$ homeomorfos a la bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ de centro 0 y radio 1. Se considera entonces $(X \setminus D_X^\circ) \coprod_f (Y \setminus D_Y^\circ)$ donde $f : \partial D_X \to \partial D_Y$ es un homeomorfismo entre los bordes de las bolas.)

18) Sea g un número natural. Sea $P_g \subset \mathbb{R}^2$ un polígono regular con $4g$ lados denotados $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots, a_g, b_g, c_g, d_g$ consecutivamente al recorrer el borde de P_g, digamos en sentido anti-horario. Vamos a definir una relación de equivalencia $\sim$ en P_g cuyo efecto será identificar cada a_i con c_i y b_i con d_i de una manera específica. Precisamente, $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $x \sim y$ si $x \in a_i, y \in c_i, d(x, a_i \cap d_i) = d(y, c_i \cap d_i)$ o bien $x \in b_i, y \in d_i, d(x, a_i \cap b_i) = d(y, a_i \cap d_i)$ donde d denota distancia en $\mathbb{R}^2$ (¡hacer un dibujo!).

Denotamos $S'(g) = P_g/_\sim$ y $\pi : P_g \to S'(g)$ la proyección al cociente. Le damos a $S'(g)$ la topologia cociente de la topología en P_g de subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Demostrar:

a) $S'(g) + S'(h)$ es homeomorfa a $S'(g + h)$

b) $S(g)$ (ejercicio anterior) y $S'(g)$ son homeomorfas.
(Sug.: induccion usando a), también ver de hacerlo directamente)

Se tiene el siguiente

Teorema. Si X es una variedad topologica de dimensión dos, compacta y orientable, entonces existe un único numero natural g (denominado "género de X") tal que X es homeomorfa a $S(g)$.

Complejos CW.

19) Sea X un espacio topológico T_2 y sea $D_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x|| \leq 1\}$. Sea $f : D_n \to X$ que verifica $f|_{D_n^\circ} : D_n^\circ \to X$ es un homeomorfismo. Sea $Y = X \coprod_f D_n$ el espacio definido como $X \coprod D_n/_\sim$ donde $\sim$ es la menor relación de equivalencia que verifica que $x \sim z$ si $x \in X$, $z \in S^{n-1} \subset D_n$ y $f(z) = x$. Sean $\lambda : X \to Y$ definida por $\lambda(x) = \overline{x}$ y $\mu : D_n \to Y$ definida por $\mu(z) = \overline{z}$. Probar:

a) La aplicación λ es una inmersión y $\lambda(X)$ es un cerrado en Y (nombre: λ es una *inmersión cerrada*).

b) El conjunto $\mu(D_n)$ es cerrado en Y.

c) $F \subset Y$ es cerrado si y sólo si $F \cap \lambda(X)$ es cerrado en X y $F \cap \mu(D_n)$ es cerrado en D_n

d) La aplicación $\mu|_{D_n^\circ} : D_n^\circ \to Y$ es una inmersión y su imagen es abierta en Y (nombre: $\mu|_{D_n^\circ}$ es una *inmersión abierta*).

e) Y es Hausdorff.

20) Describir una estructura de complejo CW para los siguientes espacios:

a) S^n.

b) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

c) La superficie de género g, S_g (usar la definición S'_g)

21) Sea $\{v_1, ..., v_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$. Probar que la base define una estructura de CW-complejo en $\mathbb{R}^n$ tomando como k-esqueleto al conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i v_i : \ s_i \in \mathbb{R}, s_i \in \mathbb{Z} \text{ para al menos } n-k \text{ índices } i \right\}$$

Dibujar en $\mathbb{R}^2$.

22) Sea K una estructura celular en X y L una estructura celular en Y. Probar que $K \times L = \{e \times f : \ e \in K, f \in L\}$ es una estructura celular en $X \times Y$. Si ambos son CW, ¿lo es el producto?

Espectro de un anillo conmutativo. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Definimos el conjunto *espectro primo de A* como el conjunto

$$\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p} \subseteq A : \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo}\}.$$

Para un conjunto $E \subseteq A$ definimos el subconjunto $V(E) \subset \mathrm{Spec}(A)$ como

$$V(E) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A : E \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

23) Probar:

a) $V(E) = V(J_E)$ con J_E el ideal generado por E.

b) $V(0) = \mathrm{Spec}\, A$, $V(1_A) = \emptyset$.

c) $V(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} V(E_\alpha)$.

d) $V(E.E') = V(E) \cup V(E')$.
Por lo tanto existe una topología en $\mathrm{Spec}\, A$ tal que los conjuntos $V(E)$ son conjuntos cerrados. Se llama la *topología de Zariski*.

24) Para cada $f \in A$, notamos D_f al conjunto

$$D_f = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(\{f\}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : \ f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Probar que los conjuntos D_f forman una base para la topología de Zariski, y que

a) $D_f \cap D_g = D_{fg}$

b) $D_f = \emptyset$ si y sólo si f es nilpotente

c) $D_f = \mathrm{Spec}(A)$ si y sólo si f es unidad

d) $\mathrm{Spec}(A)$ es cuasi-compacto
(Sugerencia: refinando el cubrimiento podemos suponer que $\mathrm{Spec}\, A$ está cubierto por una familia $\{D_{f_i}\}_{i\in I}$. Esto quiere decir que los f_i generan el ideal generado por $1 \in A$ y por lo tanto $1 = a_i f_{i_1} + \cdots + a_n f_{i_n}$. Entonces $\{D_{f_{i_k}}\}_{k=1}^n$ cubren $\mathrm{Spec}\, A$.)

25) Para facilitar la notación designaremos con x, y, etc. los puntos de $\mathrm{Spec}\, A$ y con $\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_x$, etc. los ideales primos correspondientes en A (¡aunque es claro que son la misma cosa!)

a) Probar que $x \in \mathrm{Spec}\, A$ es cerrado si y sólo si $\mathfrak{p}_x$ es un ideal maximal de A.

b) $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$.

c) $y \in \overline{\{x\}}$ si y sólo si $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_y$.

d) $\mathrm{Spec}\, A$ es un espacio T_0.

e) Si A es un dominio íntegro el punto correspondiente al ideal (0) es denso.

26) Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos. Probar:

a) El morfismo φ induce una función $\tilde{\varphi} : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$, $\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ para $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, B$.

b) $\tilde{\varphi}^{-1}(V(E)) = V(\varphi(E))$ para todo $E \subseteq A$.

c) $\tilde{\varphi}^{-1}(D_f) = D_{\varphi(f)}$ para todo $f \in A$.

Por lo tanto $\tilde{\varphi}$ es una función continua.

27) Definimos el *espectro maximal de A* como el conjunto

$$\operatorname{Max} A = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} A : \ \mathfrak{m} \text{ es un ideal maximal}\}.$$

Sea X un espacio topolgóci compacto, y sea $C(X)$ el anillo de funciones continuas a valores reales con las operaciones definidas punto a punto. Para cada $x \in X$, sea $\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X) : \ f(x) = 0\}$. El ideal $\mathfrak{m}_x$ es maximal, pues es el núcleo del epimorfismo evaluación en x, $\epsilon_x : C(X) \to \mathbb{R}$ definido por $\epsilon_x(f) = f(x)$. Por lo tanto se tiene una función $\mu : X \to \operatorname{Max}(C(X))$, definida por $\mu(x) = \mathfrak{m}_x$.

Probaremos que μ es un homeomorfismo entre X y $C(X)$.

a) Sea $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} C(X)$, y sea $V = V(\mathfrak{m})$ definido por

$$V(\mathfrak{m}) = \{x \in X : \ f(x) = 0 \forall\, f \in \mathfrak{m}\}.$$

Supongamos que V es vacío. Entonces para cada $x \in X$ existe $f_x \in \mathfrak{m}$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Dado que f_x es continua, existe un entorno abierto U_x de x en el que f_x no se anula. Como X es compacto, existen finitos $x_1 m \dots, x_n$ tales que $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ cubren X. Sea $f = f_{x_1}^2 + \cdots + f_{x_n}^2$. f no se anula en ningún punto de X, por lo tanto es una unidad en $C(X)$, que contradice el hecho que $f \in \mathfrak{m}$. Por lo tanto V es no vacío.

Sea $x \in V$. Entonces $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$, y por lo tanto iguales. Esto prueba que μ es sobreyectiva.

b) Como X es T_4, dados $x, y \in X$ distintos, existe una función continua que los separa, por lo que μ es inyectiva.

c) Sea $f \in C(X)$, y sean

$$U_f = \{x \in X : \ f(x) \neq 0\} \qquad \widetilde{U_f} = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} X : \ f \notin \mathfrak{m}\}.$$

Probar que $\mu(U_f) = \widetilde{U_f}$. Los abiertos U_f (respectivamente $\widetilde{U_f}$) forman una base para la topología de X (respectivamente de $\operatorname{Max} X$) y por lo tanto μ es un homeomorfismo.

Así X puede ser reconstruido a partir del anillo de funciones $C(X)$.

Paracompacidad. Sea X un espacio topológico X y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Un *refinamiento* de $\mathcal{U}$ es un cubrimiento $\mathcal{V}$ tal que para todo $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$. Un refinamiento *abierto* es un refinamiento por conjuntos abiertos. Un espacio topológico X se dice *paracompacto* si es Hausdorff y si todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto y localmente finito que cubre X.

28) Un espacio compacto X es, trivialmente, paracompacto.

29) *Teorema.* Todo espacio paracompacto es T_4.

a) Probar que X es T_3 de la siguiente manera: Sea $a \notin B$ con B cerrado. Para cada $b \in B$ separar a de b por un abierto U_b tal que $a \notin \overline{U_b}$. Conseguir un refinamiento $\mathcal{V}$ localmente finito de $\{U_b : \ b \in B\} \cup \{X \setminus B\}$. Considerar $\mathcal{W} = \{V \in \mathcal{V} : \ V \cap B \neq \emptyset\}$. Probar que $U = \cup_{W \in \mathcal{W}} W$ verifica $B \subset U$ y $\overline{U} = \cup_{W \in \mathcal{W}} \overline{W}$ (acá se usa que el refinamiento es localmente finito), por lo que $a \notin \overline{U}$.

b) Repetir el argumento reemplazando a a por A cerrado disjunto con B.

Partición de la unidad. Sea X un espacio topológico y sea $\phi : X \to [0,1]$ una función continua. Definimos el soporte de ϕ como el conjunto $\operatorname{sop} \phi = \overline{\{x \in X : \phi(x) \neq 0\}}$. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de X. Una familia de funciones continuas $\{\phi_\alpha : X \to [0,1]\}_{\alpha \in \Lambda}$ se dice una *partición de la unidad subordinada al (o dominada por el) cubrimiento* $\{U_\alpha\}$ si se verifica:

I) $\operatorname{sop} \phi_\alpha \subset U_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$

II) La familia $\{\operatorname{sop} \phi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es localmente finita

III) $\sum_{\alpha \in \Lambda} \phi_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in X$ (observar que la suma es finita por II)).

30) Una familia de conjuntos $\{A_\alpha\}_\alpha$ se dice *indexada finitamente por puntos* si cada $x \in X$ pertenece a finitos conjuntos A_α.

Lema de encogimiento. Sea X un espacio T_4 y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces existe un cubrimiento abierto de X, $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

a) Probar el lema en el caso $\Lambda = \mathbb{N}$.

(Supongamos que tenemos para cada $j < n$ abiertos V_j tales que $\overline{V_j} \subset U_j$ y $X = V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1} \cup \bigcup_{k \geq n} U_n$. Considerar $A_n = X \setminus \left(V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1} \cup \bigcup_{k > n} U_n\right) \subset U_n$; la normalidad implica que existe V_n abierto tal que $A_n \subset V_n \subset \overline{V_n} \subset U_n$. Probar que los V_n cubren X.)

b) El caso general se prueba haciendo inducción transfinita en el conjunto (bien ordenado) Λ.

31) *Teorema.* Si X es un espacio T_4 y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un cubrimiento por abiertos localmente finito, entonces existe una partición de la unidad dominada por $\{U_\alpha\}_\alpha$.

Sugerencia: Usar el lema de encogimiento para definir funciones $\psi_\alpha : X \to [0,1]$ tales que $\psi_\alpha(\overline{V_\alpha}) = 1$, $\psi_\alpha(X \setminus U_\alpha) = 0$. La función $\psi : X \to [0,1]$ definida por $\psi(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \psi_\alpha(x)$ está bien definida y es nunca nula. Definir $\phi_\alpha = \frac{\psi_\alpha}{\psi}$.

32) *Teorema.* Probar que si X es paracompacto y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un cubrimiento por abiertos, entonces existe una partición de la unidad dominada por $\{U_\alpha\}$.

(Sugerencia: Si $\{V_\beta\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\{U_\alpha\}$, sea para cada α, $W_\alpha = \bigcup_{V_\beta \subset U_\alpha} V_\beta$. Entonces $\{W_\alpha\}$ es localmente finito.)