Topología

Segundo Cuatrimestre 2005

Práctica 5

1) Sean X un espacio topológico e $Y \subset X$ un subespacio. Sean $A, B \subset Y$ tales que $Y = A \cup B$. Probar que A, B es una separación de Y si y sólo si $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ (las clausuras en X).

2) Sean X un espacio topológico y $A, B \subset X$ una separación de X. Probar que si $Y \subset X$ es conexo, entonces $Y \subset A$ o $Y \subset B$.

3) Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, ¿qué puede implicar la conexión de X en una de las topologías respecto de la conexión en la otra?

4) Probar que $\prod_{i \in I} X_i$ es conexo si y sólo si cada X_i es conexo.

5) Probar que en $\mathbb{R}^\omega$ con la topología caja el conjunto de las sucesiones acotadas es abierto y cerrado, y por lo tanto $\mathbb{R}^\omega$ no es conexo con esta topología.

6) a) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo.

   b) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X. Demostrar que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $A \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es conexo.

7) a) ¿Es el producto de espacios arco-conexos arco-conexo?

   b) Si $A \subset X$ y A es arco-conexo, ¿Es $\overline{A}$ arco-conexo?

   c) Si $f : X \to Y$ es continua y X es arco-conexo, ¿Es $f(X)$ arco-conexo?

   d) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una colección de subconjuntos arco-conexos de X y $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$, ¿Es $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ arco-conexo?

8) Mostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$.

9) Calcular las componentes conexas y arco-conexas de $\mathbb{R}_l$.

10) Sea X localmente arco-conexo. Mostrar que todo abierto conexo de X es arco-conexo.

11) Demostrar que toda variedad topológica de dimensión n es localmente arco-conexa. Deducir que las variedades conexas son arco-conexas.