

Topología

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 7

- 1) Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$, $f(z) = z^n$ (z es un número complejo y $n \in \mathbb{Z}$). Calcular $f_* : \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow (S^1, b_0)$, donde $b_0 = 1 + 0i$.
(Sugerencia: Alcanza con calcular $f_*[\phi]$, donde $\phi(s) = e^{2\pi is}$.)
- 2) Para cada uno de los siguientes espacios el grupo fundamental es o bien trivial, o bien \mathbb{Z} o bien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o bien el grupo fundamental del espacio $S^1 \vee S^1$. Determinar cuál es la que vale.
- a) $X = S^1 \times [0, 1]$ (un cilindro).
 - b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$ (un cilindro infinito).
 - c) $X = T$, el toro usual (recordar T es isomorfo a $S^1 \times S^1$), (dibujar los generadores).
 - d) $X = S^1 \times D_2$, esto es, un toro relleno, (dibujar los generadores).
 - e) $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
 - f) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una recta.
 - g) $X = \mathbb{R}^3 \setminus K$, donde K es la unión de los tres semiejes no negativos.
 - h) $T \setminus \{y\}$, el toro sin un punto.
 - i) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{y\}$, el plano proyectivo real sin un punto.
 - j) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.
 - k) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$.
 - l) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times 0)$.
 - m) $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.
- 3) Sea $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y sea $x_0 \in X$. Sea α un lazo en X basado en x_0 .

- a) Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(x) = e^{2\pi ix}$. Sea β el lazo $\beta(s) = \alpha(s)/\|\alpha(s)\|$. Sea $\bar{\beta}$ un levantado de β , esto es, $\bar{\beta}$ es un camino en \mathbb{R} tal que $p \circ \bar{\beta} = \beta$. Entonces $\bar{\beta}(1) = \bar{\beta}(0) + n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Probar que la clase de homotopía de α determina n de manera única y recíprocamente, que n determina la clase de homotopía de α . El entero n se llama el número de vueltas de α alrededor del origen.
- b) **Teorema.** Sea α un lazo diferenciable a trozos en X . Entonces el número de vueltas de α alrededor del origen es la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{dz}{z}.$$

(Sugerencia: Si $z = \beta(s)$ es un camino diferenciable a trozos en X , considerar el camino $s \mapsto \beta(s)/\|\beta(s)\|$ en S^1 y sea θ un levantado de este camino. Entonces $\beta(s) = \|\beta(s)\|e^{2\pi i\theta(s)}$. Calcular $\int_{\beta} \frac{dz}{z}$.)

c) Sea $b_0 = 1 + 0i$. Existen isomorfismos

$$\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, b_0) \rightarrow \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$$

y que el número de vueltas de α es la imagen de $[\alpha]$ por estos isomorfismos.

4) Sea $h : (S^1, 1) \rightarrow (Y, y_0)$. Probar que si h_* es el morfismo cero, entonces h es homotópica a una constante.

(Sugerencia: Sea $\phi : I \rightarrow S^1$, el lazo definido por $\phi(t) = e^{2\pi it}$; sea $f = h \circ \phi$. Probar que hay una homotopía F entre f y el lazo constante y_0 , y que F induce una función $H : S^1 \times I \rightarrow Y$ tal que $H \circ (\varphi \times i_I) = F$.)

5) Se dice que una función $h : S^n \rightarrow S^m$ *preserva antípodas* si $h(-x) = -h(x)$ para cada $x \in S^n$.

Teorema. Si $h : S^1 \rightarrow S^1$ preserva antípodas y es continua, entonces h no es nulhomotópica.

a) Sea $p : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $p(z) = z^2$, donde z es un número complejo de módulo 1. Mostrar que p induce una función continua $g : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $p \circ h = g \circ p$ (recordar que $p : S^1 \rightarrow S^1$ es cociente).

b) Probar que si α es un camino en S^1 que une x con su antípoda $-x$, entonces $p \circ \alpha$ es un lazo en S^1 que no es homotópico a una constante.

c) Probar que tanto p_* como g_* son monomorfismos.

d) Deducir que h no es nulhomotópica.

6) a) **Teorema (Borsuk-Ulam).** No existe ninguna función continua $f : S^2 \rightarrow S^1$ que preserve antípodas.

(Sugerencia: Considerar el ecuador en S^2).

b) **Teorema.** Dada una función continua $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe un punto $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.

c) **Teorema meteorológico.** En cada instante existen dos puntos antipodales en la superficie de la tierra con la misma temperatura y presión atmosférica.

d) **Teorema.** Si $g : S^2 \rightarrow S^2$ es continua y $g(x) \neq g(-x)$ para todo x , entonces g es suryectiva.

7) Sea A un subespacio de X ; $j : A \rightarrow X$ la inclusión, y sea $f : X \rightarrow A$ una función continua. Supongamos que la función $j \circ f : X \rightarrow X$ es homotópica a la identidad $id_X : X \rightarrow X$ mediante una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$.

a) Mostrar que si $H(a, t) \in A$ para todo $a \in A$, entonces j_* y f_* son isomorfismos.

b) Si f es una retracción, entonces j_* y f_* son isomorfismos.

c) Mostrar que no siempre j_* y f_* son isomorfismos.