Topología

Segundo Cuatrimestre 2005

Práctica 8

Revestimientos.

1) Probar que si $p : E \to B$ es un revestimiento, entonces es una aplicación abierta.

2) Probar que si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ es un revestimiento.

3) Sea Y un espacio topológico discreto. Probar que dado X cualquier espacio topológico, la proyección en la primer coordenada $p : X \times Y \to X$ es un revestimiento.

4) Probar que $p : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$ definida por $p(x) = (cos\ 2\pi x, sen\ 2\pi x)$ es un homeo local pero no es revestimiento.

5) Verificar que los siguientes son revestimientos.

   a) $p : S^1 \to S^1,\ p(x) = x^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

   b) $p : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proyección al espacio proyectivo real de dimensión n.

6) a) Sea $p : E \to B$ un revestimiento, y sea $B' \subset B$. Sea $E' = p^{-1}(B')$. Probar que $p|'_E : E' \to B'$ es un revestimiento.

   b) Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x \in \mathbb{Z}$ ó $y \in \mathbb{Z}\}$ y sea $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1\ ,\ z = 1$ ó $w = 1\}$ (donde S^1 lo vemos como subespacio de $\mathbb{C}$). Probar que $p : E \to B$ definida por $p(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$ es un revestimiento.

7) Sea $p : E \to B$ un revestimiento, con B conexo. Probar que si $p^{-1}(b_0)$ tiene k elementos para algún $b_0 \in B$, entonces $p^{-1}(b)$ tiene k elementos para todo $b \in B$. En ese caso se dice que $p : E \to B$ es finito y que tiene grado k, o que es un revestimiento con k-hojas.

8) Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ revestimientos.

   a) Probar que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $q \circ p : X \to Z$ es un revestimiento.

   b) Probar que el teorema falla si $q^{-1}(z)$ no es finito.

9) Sea $p : E \to B$ un revestimiento. Supongamos que B es conexo y localmente conexo. Mostrar que si C es una componente de E, entonces $p|_C : C \to B$ es un revestimiento.

10) Sea X un G-espacio tal que la acción es propiamente discontinua. Probar que la proyección $p : X \to X/G$ es un revestimiento.

    Observar que el revestimiento usual $p : \mathbb{R} \to S^1$ es un ejemplo de esta construcción. Encuentre en esta práctica otros ejemplos.

11) a) Sea X simplemente conexo y localmente arco conexo y sean $f, g : X \to S^1$. Probar que f y g son homotópicas.

b) Probar que toda función continua del plano proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ a S^1 es null homotópica ($n \geq 2$).

c) Probar que no existe $f : S^n \to S^1$ que preserve antípodas ($n \geq 2$).
(Sugerencia: una tal f induce una función $\overline{f} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to S^1$ que aplica el elemento no nulo de $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ en un elemento no nulo.)

12) Consideremos el toro $T = S^1 \times S^1$. Sabemos que su grupo fundamental es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y que su revestimiento universal es el producto de dos copias del revestimiento universal de S^1. Dados los siguientes subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hallar el revestimiento correspondiente.

a) El subgrupo generado por el elemento $(1, 0)$.

b) El subgrupo generado por el elemento $(1, 1)$.

c) El subgrupo $H = \{(2n, 2m) : \ m, n \in \mathbb{Z}\}$.

13) $*$ Sea $p : E \to X$ un revestimiento, con X, E arco conexos. Sea $x_0 \in X$ y denotemos $F = p^{-1}(x_0)$ la fibra sobre x_0, $\pi = \pi_1(X, x_0)$ el grupo fundamental y G el grupo de automorfismos de $p : E \to X$ (aplicaciones continuas $E \to E$ que conmutan con p). Para cada $g \in G$ denotamos $\rho(g) : F \to F$ la restricción de g a F.

Demostrar:

a) $\rho : G \to \mathbb{S}(F)$ es un morfismo de grupos inyectivo de G en el grupo simétrico de F. Sea $\mu : \pi \to \mathbb{S}(F)$ el morfismo de monodromía (definido en clase vía levantamiento de lazos). Entonces las correspondientes acciones de G y π en F conmutan.

b) La acción de G en F tiene estabilizadores triviales (o sea, $g.e = e$ implica $g = 1$). Deducir que $|G| \leq |F|$.

c) Dar ejemplos de revestimientos finitos con $|G| = |F|$ (numero máximo de automorfismos) y de revestimientos con $|G| = 1$ (no triviales).
Se dice que $p : E \to X$ es un *revestimiento normal (o regular, o de Galois)* si la acción de G en F es transitiva.

d) Un revestimiento finito es normal si y sólo si $|G| = |F|$.

e) Sea $e_0 \in F$ y denotemos $H = p_* \pi_1(E, e_0) \subset \pi$. Entonces $p : E \to X$ es un revestimiento normal si y sólo si H es un subgrupo normal de π.

f) Sea $N(H) = \{[\sigma] \in \pi / [\sigma].H = H.[\sigma]\}$ el normalizador de H. Demostrar que los grupos $N(H)/H$ y G son isomorfos.
Sugerencia: Definir un morfismo sobreyectivo $N(H) \to G$ con núcleo H. Puede ser conveniente demostrar f) en primer lugar y luego deducir los puntos anteriores.

14) Sea X un G-espacio arco-conexo, donde la acción de G en X es propiamente discontinua. Probar que el revestimiento $p : X \to X/G$ es normal.

(Sugerencia: considerar las multiplicaciones por elementos de G.)

15) Sea $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ el revestimiento usual del toro. Describir el grupo de automorfismos de p.

16) $*$ Sea P_d el conjunto de polinomios mónicos de grado d con coeficientes complejos en una variable, provisto de la topología inducida por la biyección $P_d \cong \mathbb{C}^d$ que asigna a un polinomio sus coeficientes, donde por supuesto damos a $\mathbb{C}$ la topología usual. Sea $R_d = \{(f,t) \in P_d \times \mathbb{C} / f(t) = 0\}$ (con la topología de subespacio del producto) y denotemos $p_1 : R_d \to P_d$ la primera proyección. Sea $X \subset P_d$ el conjunto de los polinomios con raíces simples (o sea, sin raíces multiples) y denotemos $p : E = p_1^{-1}(X) \to X$ la restricción de p_1.

Demostrar:

a) X es un abierto denso conexo.

Sugerencia: $X = P_d - (\Delta = 0)$, donde Δ es el discriminante.

b) E es conexo.

c) p es un revestimiento de grado d.

d) El grupo de automorfismos de p es $\{1\}$.

e) El morfismo de monodromía $\pi_1(X) \to \mathbb{S}_d$ es sobreyectivo.

f) Reemplazar $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ y pensar cuáles son las modificaciones que corresponde hacer.

Referencia: J. Harris, Galois groups of enumerative problems, Duke Mathematical Journal, vol. 46 (1979).

17) **Existencia de clausura normal.** Sea $p : E \to X$ un revestimiento. Existe un único (salvo isomorfismo) revestimiento normal $\bar{p} : \bar{E} \to X$ tal que:

a) $\bar{p} \geq p$ (o sea, existe $q : \bar{E} \to E$ morfismo de revestimientos)

b) Si $p' : E' \to X$ es normal y $p' \geq p$ entonces $p' \geq \bar{p}$

Ademas, si H es el subgrupo (salvo conjugación) de π correspondiente a p, ¿cuál es el subgrupo correspondiente a $\bar{p}$?