TOPOLOGÍA

Práctica 1

1. (i) En $\mathbb{R}^n$ definimos
$$d'(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$
Mostrar que d' es una métrica y que $(\mathbb{R}^n, d')$ tiene los mismos abiertos que $\mathbb{R}^n$ con la topología usual. Dibujar la bola abierta de centro 0 y radio 1 cuando $n = 2$.

   (ii) Dado $p \geq 1$, definimos
$$d_p(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$
¿Es cierto que sigue teniendo los mismos abiertos? Dibujar en $\mathbb{R}^2$ como varían las bolas de centro 0 y radio 1 para los diferentes p.

2. Sea (X,d) un espacio métrico, definimos $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ como
$$d'(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}.$$
Probar que d' es una métrica. Definen d y d' los mismos conjuntos abiertos? los mismos cerrados? y los mismos acotados?

3. Consideremos en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
$$\rho_1(x,y) = (\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{y} \qquad \rho_2 = \sup\{|x_i - y_i|\}.$$
¿Es alguna de estas funciones una métrica? Si no lo son, ¿puede sugerir alguna modificación para que lo sean?

4. Consideremos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con cada una de las métricas que usted definió en el ejercicio anterior y sea $\mathbb{R}^{\infty}$ el subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que consiste de las sucesiones que tienen finitas coordenadas no nulas. Calcular su clausura.

5. Sea $\ell^2 = \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty\}$. Probar que la restricción de la función ρ_1 del ejercicio 3 es una métrica para este conjunto.

6. Sean (X,d) un espacio métrico y A un subconjunto de X.
Probar que $\bar{A} = \{x \in X : \exists (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ tal que } a_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x\}$.