2^{do} *cuatrimestre* 2006

TOPOLOGÍA
Práctica 10

1. (Lema de los cinco) Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} G_1 & \xrightarrow{f_1} & G_2 & \xrightarrow{f_2} & G_3 & \xrightarrow{f_3} & G_4 & \xrightarrow{f_4} & G_5 \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \delta\downarrow & & \varepsilon\downarrow \\ H_1 & \xrightarrow[g_1]{} & H_2 & \xrightarrow[g_2]{} & H_3 & \xrightarrow[g_3]{} & H_4 & \xrightarrow[g_4]{} & H_5 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de grupos abelianos con filas exactas.

(i) Probar que si β y δ son epimorfismos y ε es un monomorfismo, entonces γ es un epimorfismo.

(ii) Probar que si β y δ son monomorfismos y α es un epimorfismo, entonces γ es un monomorfismo.

(iii) Deducir que si β y δ son isomorfismos, α es un epimorfismo y ε es un monomorfismo, entonces γ es un isomorfismo.

2. El conúcleo de un morfismo de grupos abelianos $\alpha : G_1 \to G_2$ es el grupo cociente $\text{coker}\alpha := G_2/\alpha(G_1)$. Demostrar que si la sucesión

$$G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_3 \xrightarrow{\alpha_3} G_4 \xrightarrow{\alpha_4} G_5$$

es exacta, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{coker}\alpha_1 \longrightarrow G_3 \longrightarrow \ker\alpha_4 \longrightarrow 0$$

también lo es.

3. (Lema de la serpiente) Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} & & G_1 & \xrightarrow{f_1} & G_2 & \xrightarrow{f_2} & G_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_1 & \xrightarrow[g_1]{} & H_2 & \xrightarrow[g_2]{} & H_3 & & \end{array}$$

un diagrama conmutativo de grupos abelianos con filas exactas.

(i) Probar que hay una sucesión exacta de grupos abelianos

$$\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \xrightarrow{d} \text{coker}\alpha \longrightarrow \text{coker}\beta \longrightarrow \text{coker}\gamma$$

(ii) Probar que si f_1 es un monomorfismo, entonces $\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta$ también lo es.

(iii) Probar que si g_2 es un epimorfismo, entonces $\text{coker}\beta \longrightarrow \text{coker}\gamma$ también lo es.

4. Probar que un morfismo de complejos de cadenas f es isomorfismo si y sólo si f_n es isomorfismo de grupos para todo $n \in \mathbb{Z}$.

5. Si $(\mathcal{B}; d')$ es un subcomplejo de $(\mathcal{A}; d)$, probar que la inclusión $i : (\mathcal{B}; d') \hookrightarrow (\mathcal{A}; d)$ y la proyección $j : (\mathcal{A}; d) \to (\mathcal{A}/\mathcal{B}; \bar{d})$ son morfismos de complejos de cadenas.

6. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. Calcular la homología del complejo

$$\ldots \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \ldots$$

donde $d_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ m \cdot x & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

7. Sea $(\mathcal{A}, d)$ el complejo de cadenas definido por $A_n = \mathbb{Z}_4$ y $d_n =$ multiplicar por 2. Probar que $(\mathcal{A}, d)$ no es contráctil pero que $H_n(\mathcal{A}) = 0$.

   NOTA: *De ahora en adelante σ_n denotará el n-simplex standard de $\mathbb{R}^{n+1}$ ($\sigma_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0} : x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1\}$) y H_n el n-ésimo grupo de homología singular con coeficientes en $\mathbb{Z}$.*

8. Sea X un espacio topológico y A un retracto de X.
   (i) Probar que si $i : A \to X$ es la inclusión, entonces $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es un monomorfismo.
   (ii) Probar que si $r : X \to A$ es la retracción, entonces $H_n(X) = \operatorname{im}(i_*) \oplus \ker(r_*)$.
   (iii) Probar que si A es un retracto por deformación de X, entonces i_* es un isomorfismo.

9. (i) Sea X un espacio arcoconexo y $x_0 \in X$ un punto (el punto base). Llamemos $p : X \to \{x_0\}$ a la aplicación constante y definamos $\tilde{H}_n(X)$ como el núcleo de $p_* : H_n(X) \to H_n(\{x_0\})$. Probar que $H_n(X) \simeq \tilde{H}_n(X) \oplus H_n(\{x_0\})$.
   (ii) Sean (X, x_0) e (Y, y_0) dos espacios topológicos con punto base y sea $f : X \to Y$ una función continua que conserva el punto base. Demostrar que f induce un morfismo de grupos $f_* : \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$.
   (iii) Supongamos, además, que $g : X \to Y$ es otra aplicación continua que conserva el punto base y que f y g son homotópicas relativas al punto x_0. Mostrar que $f_* = g_*$.

10. Sea Y un espacio topológico e y_0 un punto base. Si $\alpha : I \to Y$ es un camino con origen en y_0, definimos $\psi(\alpha) : \sigma_1 \to Y$ como $\psi(\alpha)(x_0, x_1) = \alpha(x_1) = \alpha(1 - x_0)$.
   (i) Probar que si α es un lazo, entonces $\psi(\alpha)$ es un 1-ciclo de Y.
   (ii) Sean α y α' dos lazos homotópicos y sea $F : I \times I \to Y$ una homotopía tal que $F(0, t) = \alpha(t)$ y $F(1, t) = \alpha'(t)$. Expresemos un punto $p \in \sigma_2$ como $p = (1 - s, s(1 - t), st)$ con $0 \leq s, t \leq 1$ y definamos $\varphi : \sigma_2 \to Y$ como $\varphi(p) = F(s, t)$.
      a. Encontrar la expresión de $\varphi(x_0, x_1, x_2)$.
      b. Justificar que φ es continua.
      c. Calcular $d_0\varphi(x_0, x_1)$, $d_1\varphi(x_0, x_1)$ y $d_2\varphi(x_0, x_1)$.

d. Deducir que $d\varphi = \psi(\alpha) + \phi(\alpha') - \psi(\varepsilon_{y_0})$ donde $\varepsilon_{y_0} : I \to Y$ es el camino constante $\varepsilon_{y_0}(t) = y_0$.

(iii) Sea $c_2 : \sigma_2 \to Y$ dado por $c_2(x_0, x_1, x_2) = y_0$. Mostrar que $dc_2 = \psi(\varepsilon_{y_0})$ y que los ciclos $\psi(\alpha)$ y $\psi(\gamma')$ son homólogos. Deducir que $\psi : \pi_1(Y, y_o) \to H_1(Y)$ es una aplicación bien definida.

11. Sea $\psi : \pi_1(Y, y_o) \to H_1(Y)$ como en el ejercicio 10 y sean α y α' dos lazos en Y con punto base y_0. Consideremos $\phi : \sigma_2 \to Y$ dada por $\phi(x_0, x_1, x_2) = \begin{cases} \alpha(1 + x_2 - x_0) & \text{si } x_0 \geq x_2, \\ \alpha'(x_2 - x_0) & \text{si } x_0 \leq x_2. \end{cases}$

(i) Justificar que ϕ es continua.

(ii) Probar que $d\phi = \psi(\alpha') - \psi(\alpha * \alpha') + \psi(\alpha)$.

(iii) Deducir que ψ es un morfismo de grupos.

12. Sea Y un espacio arcoconexo e y_0 un punto base. Sea $c = \sum n_j \varphi_j$ un 1-ciclo en Y. Para cada $j \in J$ elijamos caminos β_{j0} de y_0 a $\varphi_j(1, 0)$ y β_{j1} de y_0 a $\varphi_j(0, 1)$ que dependan unicamente del punto final (es decir, si dos caminos terminan en el mismo punto son iguales). Sea $\psi : \pi_1(Y, y_o) \to H_1(Y)$ como en el ejercicio 10

(i) Mostrar que $\sum n_j(\psi(\beta_{j1}) - \psi(\beta_{j0})) = 0$.

(ii) Sea ζ_j la 1-cadena singular de Y definida por $\zeta_j = \psi(\beta_{j0}) + \varphi_j - \psi(\beta_{j1})$. Mostrar que $c = \sum n_j \zeta_j$.

(iii) Sea $\gamma_j : I \to Y$ el camino dado por $\gamma_j(t) = \varphi_j(1 - t, t)$:

a. mostrar que $(\beta_{j0} * \gamma_j) * \beta_{j1}$ es un lazo con base y_0.

b. mostrar que $\psi((\beta_{j0} * \gamma_j) * \beta_{j1}) = \zeta_j$.

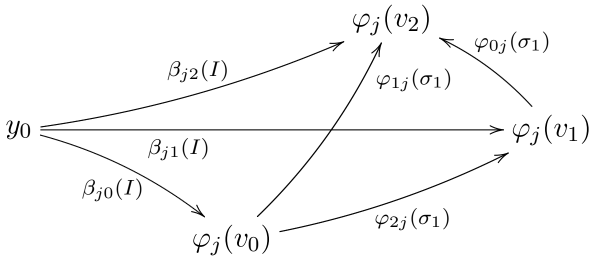
c. deducir que ψ es un epimorfismo.

13. Sea Y arcoconexo, y_0 un punto base y $\psi : \pi_1(Y, y_o) \to H_1(Y)$ como en el ejercicio 10. Sea $\alpha : I \to Y$ un lazo con base y_0 y tal que $\psi(\alpha)$ es homólogo a $0 \in H_1(Y)$.

(i) Muestre que si $\psi(\alpha) = (\sum_{j \in J} n_j \varphi_j)$, entonces existe un $l \in J$ y un $k = 0, 1, 2$ tal que $\psi(\alpha) = d_k \varphi_l$.

(ii) Sean β_{j0}, β_{j1} y β_{j2} caminos que empiezan en y_0 y terminan en $\varphi_j(1, 0, 0)$, $\varphi_j(0, 1, 0)$ y $\varphi_j(0, 0, 1)$ respectivamente y que dependan sólo del punto final.

Llamememos $v_0 = (1, 0, 0), v_1 = (0, 1, 0)$ y $v_2 = (0, 0, 1)$ y $d_k \varphi_j = \varphi_{kj}$. Tenemos:



Para cada $j \in J$ y cada $i = 0, 1, 2$ definimos α_{ji} y γ_{ji} los caminos de Y como

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha_{ji}(t) & := & d_i\varphi_j(1-t,t) \\
\gamma_{j0} & := & (\beta_{j1} * \alpha_{j0}) * \bar{\beta}_{j2} \\
\gamma_{j1} & := & (\beta_{j0} * \alpha_{j1}) * \bar{\beta}_{j2} \\
\gamma_{j2} & := & (\beta_{j0} * \alpha_{j2}) * \bar{\beta}_{j1}
\end{array}
$$

y por último, $\gamma_j := (\gamma_{j0} * \bar{\gamma}_{j1}) * \gamma_{j2}$.

Probar que h_j es equivalente a $(\beta_{j1} * ((\alpha_{j0} * \bar{\alpha}_{j2})) * \beta_{j1}$ y que, a su vez, éste es equivalente al camino constante ε_{y_0}.

(iii) Probar que el núcleo de ψ está contenido en el conmutador de $\pi_1(Y, y_0)$.

(iv) Deducir que $\pi_1(Y)/[\pi_1(Y);\pi_1(Y)] \simeq H_1(Y)$.

14. Sea Y un espacio arcoconexo. Demostrar que $\pi_1(Y, y_0)$ y $H_1(Y)$ son isomorfos si y sólo si $\pi_1(Y, y_0)$ es abeliano.

15. Calcular el H_1 del 8.