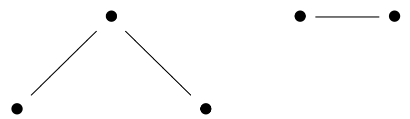
2^{do} *cuatrimestre* 2006

TOPOLOGÍA

Práctica 11

NOTA: *Otra vez σ_n denotará el n-simplex standard de $\mathbb{R}^{n+1}$ ($\sigma_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0} : x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1\}$).*

1. Sea K un complejo simplicial de 5 vértices cuya realización geométrica $|K|$ es

   Calcular su homología simplicial.

2. Hallar una triangulación de S^2 y verificar su homología simplicial coincide con la homología singular de S^2.

3. Sean K y L dos complejos simpliciales. Definir $K \cup L$ la unión disjunta de K y L, demostrar que es un complejo simplicial y que su homología simplicial es la suma directa de las homologías simpliciales de K y L.

4. Encuentre una triangulación del toro de 12 vértices. Encuentre una triangulación con sólo 9 vértices. Hay una triangulación del toro que consta de sólo 7 vértices (no intente buscarla) y no hay con menos. Si esta triangulación tiene 14 caras, ¿cuántas aristas tiene?

5. Calcular, para todo q y todo n, $H_q(S^n)$.

6. Probar que S^{n-1} no es retracto de D^n.

7. Probar que S^n no es contráctil.

8. (i) Sea $s_n : S^n \to S^n$ la simetría respecto del hiperplano $\{x_n = 0\}$. Probar que s_n no es homotópica a la identidad.

   (ii) Sea $a : S^{2n} \to S^{2n}$ la aplicación antipodal ($a(x) = -x$). Probar que a no es homotópica a la identidad.

   (iii) Si $f : S^{2n} \to S^{2n}$ es homotópica a la identidad, entonces tiene un punto fijo.

   (iv) No existe ninguna aplicación $f : S^{2n} \to S^{2n}$ tal que los vectores x y $f(x)$ sean ortogonales en $\mathbb{R}^{2n+1}$ para todo $x \in S^{2n}$.

9. Calcular $H_q(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$ para todo $q \geq 0$.

10. Dado X un espacio topológico se define la *suspensión de X* como $X \times I/\sim$, donde $(x,0) \sim (y,0)$ y $(x,1) \sim (y,1)$ para todo $x, y \in X$.

    (i) Si Y es otro espacio topológico y $f : X \to Y$ es una aplicación continua, se define $S(f) : S(X) \to S(Y)$ como $S(f)(\overline{(x,t)}) = \overline{(f(x),t)}$. Verificar que $S(f)$ está bien definida.

(ii) Mostrar que $H_n(S(X)) \simeq H_{n-1}(X)$ para todo $n \geq 2$. Si X es arcoconexo, calcular $H_0(S(X))$ y $H_1(S(X))$.

(iii) Mostrar que $S(S^n)$ es homeomorfo a S^{n+1}.

11. Dada $f : S^n \to S^n$, $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_n(S^n)$ es un endomorfismo de $\mathbb{Z}$ y, por lo tanto, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $f_*(m) = a \cdot m \; \forall m \in \mathbb{Z}$. El entero a sólo depende de f y se lo denomina el el grado de f ($\deg(f)$). Probar que

    (i) $\deg(Id_{S^n}) = 1$.

    (ii) Si f no es suryectiva, entonces $\deg(f) = 0$.

    (iii) Si $f \simeq g$, entonces $\deg(f) = \deg(g)$.

    (iv) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

    (v) Si f es una equivalencia homotópica, entonces $deg(f) =^{+}_{-} 1$.

    (vi) Para cada $i = 1, \ldots, n+1$, sea $f_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_n)$. Probar que $\deg(f_i) = -1$.

    (vii) $\deg(a) = (-1)^{n+1}$ (a la función antipodal como en ejercicio 8)

    (viii) Si f no tiene puntos fijos, entonces $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

12. Sean U y V abiertos de X. Mostrar que si el morfismo $H_1(U \cap V) \to H_1(U)$, inducido por la inclusión, es inyectivo entonces también lo es $H_1(V) \to H_1(U \cup V)$.

13. Probar que si $n \neq m$ ningún abierto de $\mathbb{R}^m$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

14. Probar que el teorema de invariancia de dominio no vale en general para espacios distintos de $\mathbb{R}^n$.

15. Probar que si U es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y existe una función $f : U \to \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva, entonces $m \geq n$.