TOPOLOGÍA

Práctica 2

1. Sea X un conjunto. Decidir cuáles las siguientes familias de subconjuntos son una topología. Ordenarlas.

   a) $\mathcal{T}_1 = \{A : A \subset X\}$.

   b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X\}$.

   c) $\mathcal{T}_3 = \{A \subset X : X \setminus A$ es finito o $X\}$.

   d) $\mathcal{T}_4 = \{A \subset X : X \setminus A$ es numerable o $X\}$.

   e) $\mathcal{T}_5 = \{A \subset A : X \setminus A$ es infinito$\}$.

2. Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de topologías en un conjunto X.

   a) Probar que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X.

   b) Probar que existe una única topología en X que es la menor de todas las topologías que contienen a todas las topologías $\mathcal{T}_\alpha$, y una única topología en X que es la mayor de todas las topologías contenidas en todas las topologías $\mathcal{T}_\alpha$.

3. Probar que si $\mathcal{B}$ es una base de una topología en X, entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{B}$. Probar que vale lo mismo si $\mathcal{B}$ es una subbase.

4. Decidir si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ forman una base de $\mathbb{R}^2$ con la topología euclídea.

   a) $\{B(a,\epsilon) = \{(x,y) : |x-a_1| + |y-a_2| < \epsilon\} \,:\, a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2; \epsilon > 0\}$.

   b) $\{W(a,\epsilon) = \{(x,y) : \sup\{|x-a_1|, |y-a_2|\} < \epsilon\} \,:\, a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2; \epsilon > 0\}$.

5. Decidir si las siguientes familias de conjuntos son subbases para las topologías indicadas

   a) $\{X - \{x\}\}$ para la topología del complemento finito.
   (Considerar al conjunto vacío si X no es finito.)

   b) $\{X - \{x\}\}$ para la topología del complemento numerable.

6. Decir si los siguientes subconjutos pueden formar una base para alguna topología de $\mathbb{R}$. De ser posible, ordenarlas.

   a) $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$.

   b) $\{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$.

   c) $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$.

   d) $\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$.

   e) $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$.

7. Sea $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$. Si C es una unión disjunta de intervalos cerrados de $[0,1]$ y A es un abierto de $\mathbb{R}$, definimos:
$$B(C,A) = \{f \in X : f(C) \subset A\}.$$
Consideremos $\mathcal{F} = \{B(C,A) : \text{para todos los posibles } C \text{ y } A\}$.

   a) Estudiar si $\mathcal{F}$ puede o no formar una subbase de alguna topología de X.

   b) Comparar, si es posible, esta topología con la inducida por $||f||_\infty = \sup\{f(t) : t \in [0,1]\}$.

8. Sean X un espacio topológico e $Y \subset X$ un subespacio con la topología inducida. Sea $A \subset Y$. Probar:

   a) A es cerrado en Y si, y sólo si, existe C cerrado en X tal que $A = C \cap Y$.

   b) $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.

9. Sean A y B subconjuntos de un espacio topológico X. Probar:

   a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

   b) $\bigcup_\alpha \overline{A}_\alpha \subset \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$

   c) $\bigcap_\alpha \overline{A}_\alpha = \overline{\bigcap_\alpha A_\alpha}$

   d) $A^o \cap \delta(A) = \emptyset \Rightarrow \overline{A} = A^o \cup \delta(A)$. Mostrar con un ejemplo que no vale la otra implicación.

   e) $\delta(A) = \emptyset \Rightarrow A$ es abierto y cerrado.

   f) A es abierto $\Leftrightarrow \delta(A) = \overline{A} \setminus A$.

   g) Es cierto que si A es abierto $A = \overline{A}^o$?

   h) $(A^c)^o = \overline{A}^o$ y $\overline{A^c} = (A^o)^c$.

10. En cada uno de los siguientes casos, calcular $\overline{A}$:

    a) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}^2$ con la topología del complemento finito.

    b) $A = \{f \in \mathcal{C}[0,1] : f(t) \neq 0 \ \forall t\}$ en $\mathcal{C}[0,1]$ con la topología definida en el ejercicio 5.

    c) $A = \{M \in \mathcal{S}^n : \det(M) \neq 0\}$ en $\mathcal{S}^n = \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ simétricas}\}$ con la topología inducida por la topología euclídea de $\mathbb{R}^{n^2}$.

11. En cada uno de los siguientes casos, calcular A^o:

    a) $A = \mathcal{S}^n$ en $\mathbb{R}^{n^2}$.

    b) $A = \{M \in \mathcal{S}^n : \det(M) \neq 0\}$ en $\mathcal{S}^n$.

    c) $A = \{M \in \mathcal{S}^n : \ \min\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } M, \lambda \neq 0\} \geq 1\}$.

    d) $A = \{M \in \mathcal{S}^n : \ \min\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } M\} \geq 1\}$.

    e) $A = \{f \in \mathcal{C}[0,1] : \exists t_0 \in [0,1] \text{ con } f(t_0) = 0\}$, en $\mathcal{C}[0,1]$ con la topología dada por $||\,||_\infty$.

    f) $A = \{h \in L^2[0,1] : \int_0^1 f \cdot h = 0\}$ con f continua en $[0,1]$ y la topología en $L^2[0,1]$ dada por $||f||_2 = (\int_0^1 f^2)^{\frac{1}{2}}$.

12. Probar que si X es un espacio vectorial con la topología dada por una norma y S es un subespacio vectorial propio, entonces $S^o = \emptyset$.

13. Calcular el borde de los subespacios de los ejercicios 9 y 10.