TOPOLOGÍA

Práctica 3

1. Sea $(X,<)$ un conjunto ordenado. Mostrar que la colección de rayos abiertos de X forman una subbase para la topología del orden.

2. Considerar el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes conjuntos:

   (i) $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$

   (ii) $\{(1-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}) : n \in \mathbb{N}\}$

   (iii) $\{(x, \frac{1}{2}) : 0 < x < 1\}$

   (iv) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$

   (v) $\{(\frac{1}{2}, y) : 0 < y < 1\}$

3. Mostrar que la topología producto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología usual.

4. Mostrar que la topología del orden del diccionario en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es la misma que la topología producto $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}_d$ denota a $\mathbb{R}$ con la topología discreta. Compararla con la topología usual en $\mathbb{R}^2$.

5. Sea $\mathbb{R}_l$, $\mathbb{R}$ con la topología dada por la base $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ (topología del límite inferior). Si L es una línea recta en el plano, describir la topología que L hereda como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

6. Sea $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Comparar la topología producto $I \times I$, la topología del orden del diccionario en $I \times I$ y la topología $I_d \times I$, donde I_d denota a I con la topología discreta.

7. Sea $(X,<)$ con la topología del orden. Mostrar que $\overline{(a,b)} \subset [a,b]$. ¿Cuándo vale la igualdad?

8. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

9. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y sea para cada $i \in I$, $A_i \subseteq X_i$ un subconjunto. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas si se toma en $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?.

   (i) Si cada A_i es cerrado en X_i, entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es cerrado en X.

   (ii) $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

10. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red de puntos en el espacio $X = \prod_{i \in I} X_i$ considerado con la topología producto. Probar que la red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge si y sólo si converge coordenada a coordenada, es decir si y sólo si $(\pi_i(x_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$ converge en X_i para todo $i \in I$. ¿Es cierto esto si consideramos la topología caja en lugar de la producto?

11. Mostrar que la topología del orden es Hausdorff.

12. Mostrar que el producto de dos espacios Hausdorff es Hausdorff.

13. (i) Mostrar que el axioma T_1 es equivalente a que todo conjunto finito sea cerrado (y esto es equivalente a que los puntos sean cerrados).

(ii) Sea X un conjunto. La topología $\mathcal{I}_f$ del complemento finito satisface T_1 y está contenida en cualquier topología T_1 de X. ¿Es $\mathcal{I}_f$ Hausdorff?

14. Considerar las diferentes topologías en $\mathbb{R}$ dadas en la práctica 2.

    (i) Determinar la clausura de $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ para cada topología.

    (ii) ¿Cuáles de estas topologías son Hausdorff? ¿ cuáles son T_1?

15. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Probar que:

    (i) Un punto x es de acumulación de A si, y sólo si, existe una red en $A \setminus \{x\}$ que converge a x.

    (ii) Un punto x está en la clausura de A si, y sólo si, existe una red en A que converge a x.

    (iii) A es cerrado si, y sólo si, ninguna red en A converge a un punto de $X \setminus A$.

16. Mostrar que X es Hausdorff si, y sólo si, la diagonal, $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$, es cerrada en $X \times X$ con la topolgía producto.