TOPOLOGÍA

Práctica 4

1. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Probar que son equivalentes:

   (i) f es continua

   (ii) $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo F cerrado en Y

   (iii) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

   (iv) $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

   (v) Si $(x_\alpha) \subset X$ es red convergente a x, entonces $(f(x_\alpha)) \subset Y$ es red convergente a $f(x)$.

2. Considere $[0, 2\pi)$ con la topología inducida de $\mathbb{R}$ y S^1, la circunferencia de radio 1, con la inducida de $\mathbb{R}^2$. Sea $f : [0, 2\pi) \to S^1$ dada por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. ¿Es f un homeomorfismo?

3. Construir un homeomorfismo entre

   (i) $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$.

   (ii) $S^n - \{p\}$ y $\mathbb{R}^n$, $p \in S^n$ cualquiera.

4. Sea $X = \bigcup\limits_i U_i$ donde $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ es una familia de abiertos.

   Sean $f_i : U_i \to Y$ continua en cada U_i y tales que $f_i = f_j$ en $U_i \cap U_j$.

   Probar que $f(x) := f_i(x)$ si $x \in U_i$ está bien definida en todo X y es continua.

5. Sean X e Y espacios topológicos. Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos cerrados de X tal que $X = \bigcup A_\alpha$ y $f : X \to Y$ una función tal que $f|_{A_\alpha}$ es continua $\forall \alpha \in \Lambda$.

   (i) Probar que si Λ es finito entonces f es continua.

   (ii) Buscar un ejemplo con $\Lambda = \mathbb{N}$ y f no continua.

   (iii) Diremos que $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia localmente finita si $\forall\ x \in X$, $\exists$ un entorno U de x tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos $\alpha \in \Lambda$. Mostrar que si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es localmente finita entonces f es continua.

6. Analizar la continuidad de las siguientes aplicaciones

   (i) $\det : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ donde $\mathcal{S}^n = \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ simétricas}\}$.

   (ii) $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tiene la topología del diccionario.

   (iii) $\mathcal{C}[0, 1]$ con la topología dada por $|| \, ||_\infty$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & f(0) \end{array}$$

7. Sean X un espacio topológico y $E \subset X$.

   $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

   Probar que χ_E es continua en x si, y sólo si, $x \notin \partial E$.

8. Demostrar que $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la proyección a la primer coordenada, no es cerrada.

9. Sean X, X' un mismo conjunto con topologías $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ respectivamente, $id : X' \to X$ la función identidad. Demostrar que

   (i) id es continua si, y sólo si, $\mathcal{I}'$ es más fina que $\mathcal{I}$.

   (ii) id es un homeomorfismo si, y sólo si, $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$.

   (iii) Si $n \in \mathbb{N}$, definimos en $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{I}_n$ adjuntandole a la topología usual el conjunto $\{n\}$. Mostrar que $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_1)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_2)$ pero $\mathcal{I}_1 \neq \mathcal{I}_2$.

10. (i) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, f es un homeomorfismo.

   (ii) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es continua.

   (iii) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}$. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   Probar que f es biyectiva y preserva el orden ¿Es f un homeomorfismo?

11. (i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a derecha. Probar que f es continua considerada como función de $\mathbb{R}_l$ en $\mathbb{R}$.

   (ii) ¿Cómo son las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_l$? ¿ y las de $\mathbb{R}_l$ en $\mathbb{R}_l$?

12. Sean X un espacio topológico cualquiera e Y un conjunto ordenado, con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.

   (i) Probar que $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

   (ii) La función $h : X \to Y$ definida como $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ es continua.

13. Sean $Y = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, $\beta \in I$ y $p_\beta : Y \to X_\beta$ la proyección. Probar que p_β es abierta.

14. Probar que $f : A \to \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es continua si, y sólo si, para todo $\beta \in I$, $p_\beta \circ f$ es continua, donde $p_\beta : \prod_{\alpha} X_\alpha \to X_\beta$ es la proyección.

15. Sean $X = \sum_{\alpha \in I} X_\alpha$ e $\iota_\alpha : X_\alpha \to X$. Probar que ι_α es una inmersión si la familia es disjunta.

16. Probar que si $A_\alpha \subset X_\alpha \ \forall \, \alpha \in I$ entonces $\prod_{\alpha} A_\alpha \subset \prod_{\alpha} X_\alpha$ y que $\overline{\prod_{\alpha} A_\alpha} = \prod_{\alpha} \overline{A_\alpha}$.

17. Sean X, Y espacios topológicos tales que Y es Hausdorff. Sea $A \subset X$ y $f : A \to Y$ función continua. Probar que si existe $\overline{f} : \overline{A} \to Y$ extensión continua de f, ésta es única.

18. Sean X y Z espacios topológicos y $g : X \to Z$ una función continua y suryectiva. Sea $X^* := \{g^{-1}(z) : z \in Z\}$ (colección de subconjuntos de X) con la topología cociente. Probar que:

   (i) X^* es Hausdorff si Z lo es.

(ii) g induce una función $f : X^* \to Z$ continua y biyectiva que es un homeomorfismo si, y sólo si, $g : X \to Z$ es un cociente.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow & \searrow & \\ X^* & \dashrightarrow & Z \end{array}$$

Observar que de este punto se deduce una caracterización de todos los cocientes.

19. Sea $Y = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ con la topología inducida por la métrica usual. Sea $p_1 : Y \to \mathbb{R}$ la proyección a la primera coordenada. Mostrar que p_1 no es ni abierta ni cerrada pero es un cociente.

20. Sean $Z = (\mathbb{R} \times 0) \cup (0 \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to Z$ dada por:

$$\begin{array}{rcl} g(x,y) & = & (x,0) \quad \text{si } x \neq 0 \\ g(0,y) & = & (0,y) \end{array}$$

(i) Mostrar que si $\mathbb{R}^2$ tiene la topología usual y Z la inducida por ésta, g no es continua y, por lo tanto, Z no tiene la topología cociente.

(ii) Mostrar que Z no es Hausdorff con la topología cociente inducida por g.

21. Sea X un espacio topológico y G un grupo que actúa sobre X por la izquierda.

(i) Para cada $x \in X$ y cada $g \in G$ definimos $x \cdot g := g^{-1} \cdot x$. Probar que esto define una acción de G sobre X a derecha.

(ii) Para cada $x \in X$ definimos el *estabilizador* de x como el conjunto $G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$. Probar que G_x es un subgrupo de G.

(iii) Para cada $x \in X$ definimos la *órbita* de x como el conjunto $G \cdot x := \{g \cdot x : g \in G\}$. Probar que dos órbitas $G \cdot x$ y $G \cdot y$ o bien son disjuntas o bien coinciden. Deducir que X se descompone como unión disjunta de subconjuntos disjuntos.

22. Sean G un grupo y X un G-espacio. Demostrar que para todo $g \in G$ la aplicación $\theta_g : X \to X$ definida por $\theta_g(x) := g \cdot x$ es un homeomorfismo.

23. Sean G un grupo, X un G-espacio y $p : X \to X/G$ la proyección. Sean Z un espacio topológico y $f : X/G \to Z$. Probar que f es abierta si, y sólo si, $f \circ p$ lo es.

24. Sean G un grupo finito, X un G-espacio. Probar que la proyección $p : X \to X/G$ es cerrada.

25. Sean G un grupo, H un subgrupo invariante (normal) de G y X un G-espacio. Demostrar que X/H es un G/H-espacio y que $(X/H)/(G/H) \simeq X/G$.

26. Sean G_1 y G_2 dos grupos, X_1 un G_1-espacio y X_2 un G_2-espacio. Probar que $(X \times Y)/(G \times H)$ es homeomorfo a $X/G \times Y/H$.

27. Para cada $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y cada $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definimos

$$(n,m) \cdot (x,y) = (n+x, m+y).$$

Probar que esto define en $\mathbb{R}^2$ una estructura de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-espacio y que $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ es homeomorfo a $S^1 \times S^1$.