2^{do} *cuatrimestre* 2006

TOPOLOGÍA

Práctica 5

1. Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ espacios topológicos disjuntos dos a dos. Probar que si X_i es Hausdorff para todo $i \in I$ entonces la suma de los X_i es Hausdorff.

2. Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ espacios topológicos no vacíos. Probar que si $\prod X_i$ es Hausdorff, entonces X_i es Hausdorff para todo $i \in I$. Vale el mismo enunciado reemplazando Hausdorff por regular o por normal?

3. Probar que subespacios o productos de espacios completamente regulares son completamente regulares.

4. Sean X e Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ continuas. Probar que si Y es Hausdorff, el conjunto $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.

5. Sea X un espacio regular. Probar que dos puntos en X tienen entornos cerrados disjuntos.

6. Sea X un espacio normal. Probar que dos cerrados disjuntos de X tienen entornos cerrados disjuntos.

7. Probar que si X tiene la topología del orden entonces es regular.

8. ¿Es $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ normal con la topología producto?

9. Sea $p : X \to Y$ continua y cerrada. Probar que si X es normal, Y también lo es.

10. Sea X un espacio Hausdorff. Probar que el cono de X, $C(X) = X \times [0,1]/X \times \{1\}$, es Hausdorff.

11. Mostrar que Tietze implica Urysohn.

12. Sean A y B dos cerrados disjuntos de un espacio normal X. Probar que

    (i) A es un G_δ si, y sólo si, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f^{-1}(0) = A$ y $f(B) = \{1\}$.

    (ii) A y B son G_δ si, y sólo si, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) = B$.

13. Sea $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ una sucesión de espacios topológicos tales que X_i es un subespacio cerrado de X_{i+1} para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $X = \bigcup X_i$ y definimos $A \subset X$ es abierto si, y sólo si, $A \cap X_i$ es abierto en X_i para todo $i \in \mathbb{N}$.

    (i) Probar que X_i es un subespacio de X.

    (ii) Probar que si X_i es normal para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces X también lo es.

14. Probar que todo espacio Lindelöf regular es normal.

15. (i) Probar que un subespacio de un espacio N_1 (respectivamente N_2) es N_1 (resp. N_2).

    (ii) Probar que el producto numerable de espacios N_1 (resp N_2) es N_1 (resp N_2).

16. Considerar el espacio $\mathbb{R}_l$ ($\mathbb{R}$ con la topología del límite inferior) y $L = \{(x,y) : y = -x\} \subset \mathbb{R}_l^2$.

    (i) Probar que $\mathbb{R}_l$ es N_1, Lindelöf y separable pero no es N_2.

    (ii) Probar que $\mathbb{R}_l^2$ no es Lindelöf.

    (iii) Probar que $\mathbb{R}_l^2$ es separable pero L, con la topología inducida, no.

17. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones continuas a valores reales que separan puntos de cerrados. Probar que la topología de X es la más gruesa para la cual las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas.