TOPOLOGÍA

Práctica 6

1. Sean $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ dos topologías dadas en un conjunto X, tales que $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}'$. Si X es compacto en alguna de ellas, ¿qué puede decirse de su compacidad con respecto a la otra?

   Mostrar que si X es compacto y T_2 con ambas topologías, entonces o bien $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$ o bien no son comparables.

2. Sea $\mathbb{R}_f$ $\mathbb{R}$ con la topología del complemento finito. Mostrar que todo subconjunto de $\mathbb{R}_f$ es compacto.

3. Estudiar la compacidad del $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topología del límite inferior.

4. Un espacio topológico X es compacto si, y sólo si, toda red en X tiene un punto de acumulación.

5. Sean X un espacio Hausdorff y A y B subconjuntos de X compactos y disjuntos. Probar que existen abiertos disjuntos U y V que contienen, respectivamente, a A y a B.

6. Sea Y compacto Hausdorff. Probar que $f : X \to Y$ es continua si, y sólo si, $G_f = \{(x, f(x))\} \subset X \times Y$ (el gráfico de f) es cerrado en $X \times Y$ (con la topología producto).

7. Sean $A \subset X$, $B \subset Y$ y N un abierto de $X \times Y$ tal que $A \times B \subset N$. Probar que si B es compacto, existe un abierto U de X tal que $A \times B \subset U \times B \subset N$. Mostrar que si A es también compacto entonces existe además un abierto V de Y tal que $A \times B \subset U \times V \subset N$.

8. Probar que Y es compacto si, y sólo si, $\pi_1 : X \times Y \to X$ es cerrada para cualquier X.

9. Probar que $\mathbb{P}^n \simeq S^n/\sim$, donde $c \sim d \Leftrightarrow c = d$ ó $c = -d$. Probar también que $\mathbb{P}^1 \simeq S^1$.

10. Mostrar que la aplicación $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f([x_0 : x_1 : x_2]) = (x_0^2 - x_1^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$ es continua e inyectiva.

11. Considerar $\mathbb{M}$, la banda de Möbius, $\mathbb{M} := [0,1] \times [0,1]/(0,t) \sim (1, 1-t)$. Probar que:

    (i) $\mathbb{M}$ con la topología cociente está inmersa en $\mathbb{R}^3$.

    (ii) si $p : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{M}$ es la proyección, $p([0,1] \times \{0\} \cup [0,1] \times \{1\})$ es homeomorfo a S^1.

12. Definimos $\mathbb{T}$, el toro, como el cociente de $[0,1] \times [0,1]$ por la relación $(t,0) \sim (t,1)$ y $(0,t) \sim (1,t)$. Probar que $\mathbb{T}$ es homeomorfo a $S^1 \times S^1$.

13. Calcular $\mathbb{R}^2/\sim$ donde

    (i) $(x,y) \sim (w,z) \Longleftrightarrow x + y^2 = w + z^2$.

    (ii) $(x,y) \sim (w,z) \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = w^2 + z^2$.

14. Sean $\mathbb{Q}$ los racionales con la topología inducida por $\mathbb{R}$ y $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ el cociente. Probar que p es cerrada y que $p \times id_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ no es un cociente.

15. Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

16. Sea $(X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Mostrar que $\prod X_\alpha$ es localmente compacto si, y sólo si, cada X_α es localmente compacto y X_α es compacto para todos los α salvo finitos.

17. (i) Sea $p : X \to Y$ una función cociente y Z un espacio localmente compacto Hausdorff. Probar que $\pi = p \times id_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es una función cociente.

    (ii) Sea $p : A \to B$ y $q : C \to D$ funciones cocientes. Si B y C son localmente compactos Hausdorff, entonces $p \times q : A \times C \to B \times D$ es también un cociente.

18. ¿Cuál es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}$?, ¿y la de $\mathbb{R}^2$?

19. Sea Y una compactificación arbitraria de un espacio X. Probar que existe una función continua y suryectiva $g : \beta(X) \to Y$ tal que $g_{|X} = \mathrm{id}_X$ ($\beta(X)$ es la compactificación de Stone-Čech de X).

20. Un espacio $(X, \mathcal{T})$ se dice σ-compacto si $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donde cada A_n es compacto en X.

    (i) Probar que todo espacio σ-compacto es de Lindelöf.

    (ii) Probar que todo espacio localmente compacto y Lindelöf es σ-compacto.

    (iii) Probar que el producto de dos espacios σ-compactos es σ-compacto.