2^{do} *cuatrimestre* 2006

TOPOLOGÍA

Práctica 7

1. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías dadas en un conjunto X, tales que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Si X es conexo en alguna de ellas, ¿qué puede decirse de su conexidad con respecto a la otra?

2. Sea A conexo. ¿Son conexos el interior y el borde de A?

3. Sea $A \subset X$, C un subconjunto conexo de X que interseca A y A^c. Probar que $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   (i) X es totalmente disconexo si, y sólo si, su topología es la discreta.

   (ii) X es conexo si, y sólo si, para todo $A \neq \emptyset, A \subseteq X \ : \ \partial A \neq \emptyset$.

5. Sea $(A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de subespacios conexos de X. Si existe $A \subset X$ conexo tal que $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$ entonces $A \cup (\bigcup A_\alpha)$ es conexo.

6. Sean $\{A_n \subset X : n \in \mathbb{N}\}$ conexos, tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Mostrar que $\bigcup A_n$ es conexo.

7. Decidir si los siguientes conjuntos son conexos. Justificar.

   (i) $\mathbb{R}_l$

   $(ii) (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}^2$

   (iii) $\mathbb{N} \times [0,1)$ con la topología del diccionario

   (iv) $[0,1) \times \mathbb{N}$ con la topología del diccionario.

   (v) $[0,1) \times [0,1]$ con la topología del diccionario.

   (vi) $[0,1] \times [0,1)$ con la topología del diccionario.

   (vii) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología de cajas.

8. Sea X con la topología del complemento finito. Mostrar que si X es infinito, entonces X es conexo.

9. Sean $Y \subset X$ conexos. Mostrar que si A y B separan $X \setminus Y$, entonces $Y \cup A$ e $Y \cup B$ son conexos.

10. (i) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua. Probar que f tiene un punto fijo (i.e., existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$). ¿Qué pasa si se cambia $[0,1]$ por $(0,1]$? ¿y por $(0,1)$?

    (ii) Mostrar que $(0,1)$, $(0,1]$ y $[0,1]$ no son homeomorfos (tomados de a dos).

11. Mostrar que, para todo $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos.

12. Hallar las componentes conexas de $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1] \ \cup \ \{(0,0);(0,1)\}$. Verificar que si $A \subset X$ es un abierto-cerrado entonces o bien $\{(0,0);(0,1)\} \subset A$ o bien $A \subset \{(0,0);(0,1)\}^c$.

13. ¿Es arcoconexo el producto de arcoconexos? ¿Es arcoconexa la clausura de un arcoconexo? ¿Es arcoconexa la imagen por una función continua de un arcoconexo? ¿Es arcoconexa la unión de espacios arcoconexos con, por lo menos, un punto en común?

14. Decidir cuáles de los espacios del ejercicio 7 son arcoconexos. Hallar las componentes arcoconexas.

15. Determinar las componentes conexas y arcoconexas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$.

    a) $A = (\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times [0,1]) \cup \{0\} \times [0,1]$ b) $B = A \setminus \{(0, \frac{1}{2})\}$ c) $C = B \cup ([0,1] \times \{0\})$

16. Sean X localmente conexo y $f : X \to Y$ continua. ¿Es $f(X)$ necesariamente localmente conexo? ¿y si f es además abierta?

17. Sea X localmente arcoconexo. Mostrar que todo abierto conexo de X es arcoconexo.