2^{do} *cuatrimestre* 2006

TOPOLOGÍA

Práctica 8

1. Sea G un grupoide. Probar que las componentes conexas de G forman una partición de G.

2. Sea G un grupoide y sean $x_0, x_1, y_0, y_1 \in G$ tales que x_0 está en la misma componente conexa que y_0 y x_1 está en la misma componente que y_1.

   (i) Demostrar que los conjuntos $G(x_0, x_1)$ y $G(y_0, y_1)$ están en biyección.

   (ii) Demostrar que los grupos G_{x_0} y G_{y_0} son isomorfos.

3. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Probar que el grupoide fundamental $\pi_1(X)$ es trivial (i.e. X es simplemente conexo). Deducir que si $a, b \in X$ y γ es un camino en X entre a y b, entonces $\gamma \underset{p}{\simeq} \overline{ab}$ (donde $\overline{ab}$ denota el segmento de origen a y extremo b).

4. Sea X un espacio topológico y sea $x_0 \in X$. Definimos el *espacio de lazos*

$$\Omega X = \{\omega : I \to X \mid \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$$

   con la topología subespacio de la compacto abierta. Demostrar que $\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega X)$.

5. Sea X arcoconexo y sean $x, y \in X$. Probar que $\pi_1(X, x)$ es abeliano si, y sólo si, para todo par de caminos α y β entre x e y, se tiene que $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

6. Sea $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

   (i) Probar que $[X, I]$ tiene un único elemento, para todo espacio X.

   (ii) Si Y es conexo por arcos $[I, Y]$ tiene un único elemento.

7. (i) $[0, 1]$ y $\mathbb{R}$ son contráctiles.

   (ii) Un espacio contráctil es arcoconexo.

   (iii) Si Y es contráctil, $\forall\ X\ : [X, Y]$ tiene un único elemento.

   (iv) Si X es contráctil, Y arcoconexo, entonces $[X, Y]$ tiene un único elemento.

   (v) Probar que el producto de espacios contráctiles es contráctil.

8. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ estrellado (existe $a \in A$ tal que, para todo $x \in A$, $\overline{ax} \subset A$).

   (i) ¿Es todo conjunto estrellado convexo?

   (ii) Si A es estrellado, entonces es simplemente conexo.

   (iii) Si A es estrellado, dos arcos con los mismos extremos son homotópicos.

9. Probar que si X es contráctil, $X \simeq \star$.

10. Probar que si $X \simeq Y$ y X es contráctil entonces Y lo es.

11. (i) Sean $a \in A \subset X$ y $r : X \to A$ una retracción. Mostrar que $r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ es suryectiva.

    (ii) Mostrar que si $r : X \to A$ es un retracto por deformación fuerte $\pi_1(X, a)$ es isomorfo a $\pi_1(A, a)$.

12. Demostrar que en $\mathbb{M}$, la banda de Möbius, existe una circunferencia que es un retracto por deformación fuerte de $\mathbb{M}$. Deducir que $\mathbb{M}$ es homotópica a un cilindro.

13. Probar que existe una retracción $r : D^n \to S^{n-1}$ si y sólo si S^{n-1} es contráctil.

14. Sea A un subespacio de X y sea Y un espacio topológico no vacío. Probar que $A \times Y$ es un retracto de $X \times Y$ si y sólo si A es un retracto de X.

15. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, Si $h : (A, a) \to (Y, y)$ puede extenderse continuamente a todo $\mathbb{R}^n$, entonces h_* es el morfismo unidad.

16. Sea X arcoconexo, $x_0, x_1 \in X$. Probar que son equivalentes:

    a) X es simplemente conexo

    b) Dados dos arcos que unen x_0 y x_1 son homotópicos.

17. Sean X un espacio topológico y $\mathrm{C}(X) = X \times I / X \times \{1\}$ $(I = [0, 1])$, el cono de X.

    a) Sean $p : X \times I \to \mathrm{C}(X)$ la proyección al cociente y $p_0 : X \to \mathrm{C}(X)$ dada por $p_0(x) = p(x, 0)$. Probar que p_0 es una inmersión.

    b) Probar que $\mathrm{C}(X)$ es contráctil.

    c) Sea $f : X \to Y$ continua. Probar que $f \sim cte$ si, y sólo si, f se extiende a $\mathrm{C}(X)$, esto es, existe $h : \mathrm{C}(X) \to Y$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p_0"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathrm{C}(X) \arrow[r, dashed, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$