2^{do} *cuatrimestre* 2006

TOPOLOGÍA

Práctica 9

1. (a) Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas entre espacios topológicos y sean $H : f \simeq g$ una homotopía y $\alpha : I \to Y$ un camino de $f(x_0)$ a $g(x_0)$ dado por $H(x_0, t)$.

   i) Sea $\omega : I \to X$ tal que $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$. Construir una homotopía entre $(\bar{\alpha} * f\omega) * \alpha$ y $g\omega$.

   ii) Deducir que los morfismos $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ y $g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, g(x_0))$ satisfacen que $g_* = \widehat{\alpha} f_*$.

   (b) Probar que si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ es un isomorfismo para todo $x \in X$.

2. Sea L una variedad lineal de dimensión n de $\mathbb{R}^m$ con $m \geq n + 2$. Calcular $\pi_1(\mathbb{R}^m - L)$.

3. Calcular $\pi_1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T}$ el toro.

4. Calcular $\pi_1(X)$ en cada uno de los siguientes casos:

   (i) $X = D^2 \times S^1$

   (ii) $X = S^1 \times S^1 \setminus \{(a, b)\}$

   (iii) $X = S^1 \times I$

   (iv) $X = S^1 \times \mathbb{R}$

   (v) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \geq 1\}$

   (vi) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| > 1\}$

   (vii) $X = S^1 \times (\mathbb{R} \times \{0\})$

5. Supongamos que $X = U_1 \cup U_2$, con U_1 y U_2 abiertos y arcoconexos y con $U_1 \cap U_2$ no vacío y arcoconexo. Sean $\varphi_1 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1$ y $\psi_1 : U_1 \hookrightarrow X$ las inclusiones.

   (i) Probar que si U_2 es simplemente conexo, entonces $\psi_{1_\star} : \pi_1(U_1, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es un epimorfismo.

   (ii) Probar que si U_2 y $U_1 \cap U_2$ son simplemente conexos, entonces $\psi_{1_\star} : \pi_1(U_1, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es un isomorfismo.

6. (i) Sea X_n la unión de n circunferencias que se intersecan (dos a dos y de cualquier modo) en un único punto x_0. Probar que $\pi_1(X_n, x_0)$ es el grupo libre con n generadores.

   (ii) Sea $Y_n \subset \mathbb{C}$ el conjunto $Y_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - j + 1/2| = 1/2, j = 1, 2, ..., n\}$. Calcular $\pi_1(Y_n, 0)$.

7. Calcular el grupo fundamental de

(i) $\mathbb{T} \setminus \{y\}$, el toro menos un punto.

(ii) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{y\}$, el plano proyectivo menos un punto.

(iii) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, la unión por un punto de dos copias del plano proyectivo.

(iv) $S^n \vee S^n$, la unión por un punto de dos copias de S^n.

(v) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

(vi) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$.

(vii) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.

(viii) $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

8. Sea $X = I \times I/\sim$ donde $(0,t) \sim (1,1-t)$ y $(t,0) \sim (1-t,1)$ (la botella de Klein). Calcular el grupo fundamental de X.

9. Probar que $p : S^1 \to S^1$ dada por $p(z) = z^n$ es un revestimiento.

10. Considerar el revestimiento de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$: $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ dado por $p(x,t) = (t\cos(2\pi x), t\,\mathrm{sen}(2\pi x))$. Encontrar levantamientos de las curvas:

    (i) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ definida como $\gamma(t) = (2-t, 0)$.

    (ii) $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ definida como $\delta(t) = ((1+t)\cos(2\pi t), (1+t)\mathrm{sen}(2\pi t))$.

11. Mostrar que no existe una retracción $r : D^2 \to S^1$, donde $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}$.

12. Sea $X = A \cup B$ con A y B cerrados en X simplemente conexos y localmente arcoconexos tal que $A \cap B$ es un solo punto. Probar que si $p : E \to X$ es un revestimiento, entonces p es un homeomorfismo.

13. Sea X simplemento conexo y localmente arcoconexo y sean $f, g : X \to S^1$. Probar que f y g son homópicas.

14. Sea X un espacio arcoconexo y G un grupo que actúa sobre X tal que $p : X \to X/G$ es un revestimiento. Sea $x_0 \in X$ y $y_0 = p(x_0)$.

    (i) Mostrar que existe un morfismo de grupos $\varphi : \pi_1(X/G, y_0) \to G$.

    (ii) Mostrar que el núcleo de φ es el subgrupo $p_*\pi_1(X, x_0)$.

    (iii) Deducir que $\pi_1(X/G, y_0)/p_*\pi_1(X, x_0) \cong G$.

    (iv) Mostrar que si X es simplemente conexo $\pi_1(X/G, y_0) \cong G$.

15. Sea A un retracto de D^2. Probar que toda función continua $A \to A$ tiene un punto fijo.

16. La composición de dos revestimientos $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ es revestimiento si la fibra de z, $q^{-1}(z)$ es finita para todo $z \in Z$.