1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

TOPOLOGÍA

PRIMER PARCIAL - 11/10/2007

(1) Sean I un conjunto codirigido y $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos compactos, Hausdorff y no vacíos. Supongamos que para cada $i \leq j \in I$ se tiene una función continua $f_{i,j} : X_i \to X_j$ de manera que:

- $f_{ii} = Id$, para todo $i \in I$;
- si $i \leq j \leq k \in I$ entonces $f_{k,j} \circ f_{i,k} = f_{i,j}$.

Probar que existe una familia de puntos $\{a_i\}_{i\in I}$ con $a_i \in X_i$ y si $i \leq j$, $f_{i,j}(a_i) = a_j$.

(2) Sea X un espacio topológico. Probar que son equivalentes:

(a) $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si F es secuencialmente cerrado (es decir, si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq F$ es una sucesión de términos de F que converge a algún punto x, entonces $x \in F$);

(b) X es homeomorfo a un cociente de una unión disjunta de copias de $\mathbb{N}^*$, donde $\mathbb{N}^*$ es la compactificación por un punto de $\mathbb{N}$:

$$X \cong \left(\bigsqcup_{i\in I} \mathbb{N}^* \right) / \sim .$$

(3) Sea $X = [0,1]^{[0,1]}$ con la topología producto. Probar que X tiene un subconjunto contable (es decir, finito o numerable) y denso, pero existe un subespacio $A \subseteq X$ que no contiene ningún subconjunto contable y denso (en A).

(4) Sea X un espacio de Hausdorff tal que existe una sucesión creciente de subespacios $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ de manera que $X = \bigcup_n X_n$ y X tiene la topología final respecto de las inclusiones $X_n \hookrightarrow X$. Probar que si $A \subset X$ es compacto, entonces $A \subset X_n$ para algún n.

(5) Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Consideramos la topología definida por los siguientes entornos: en un punto (x,y) con $y > 0$, los entornos son los usuales de la topología de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. En un punto (x,y) con $y = 0$, una base de entornos está dada por $B \cup \{(x,y)\}$, donde B es una bola abierta contenida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$, tangente a la recta $\mathbb{R} \times \{0\}$ en (x,y). Decidir si X es localmente compacto.