TOPOLOGÍA
Práctica 1

Bases y sub-bases de topologías

(1) Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una colección de topologías en X.
  (a) Probar que $\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_{\alpha\in A}\mathcal{T}_\alpha$ una topología en X?
  (b) Probar que existe una única topología en X que es la menor de todas las topologías que contienen a todas las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ $(\alpha\in A)$, y una única topología en X que es la mayor de todas las topologías contenidas en cada una de las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ $(\alpha\in A)$.

(2) Probar que si $\mathcal{B}$ es base de una topología en X, entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{B}$. Probar que vale lo mismo si $\mathcal{B}$ es una sub-base.

(3) Sea $(X,<)$ un conjunto ordenado. Sean $\mathcal{S}=\{S_x:\ x\in X\}$ y $\mathcal{R}=\{R_x:\ x\in X\}$, donde $R_x=\{y\in X : x<y\}$. Probar que $\mathcal{S}\cup\mathcal{R}$ son una sub-base para la topología del orden en X.

(4) Considerar las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:
$\mathcal{B}_1=\{(a,b):\ a<b\}$,
$\mathcal{B}_2=\{[a,b):\ a<b\}$,
$\mathcal{B}_3=\mathcal{B}_1\cup\{B\setminus K:\ B\in\mathcal{B}_1\}$, donde $K=\{1/n:\ n\in\mathbb{N}\}$,
$\mathcal{B}_4=\{B:\ \mathbb{R}\setminus B \text{ es finito}\}$.
  (a) Probar que cada $\mathcal{B}_i$ es una base para una topolología en $\mathbb{R}$.
  (b) Comparar las cuatro topologías entre sí.

Notación: Notaremos $\mathbb{R}_l$ al espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología definida por $\mathcal{B}_2$.

(5) **Topologías definidas por filtro de entornos.**
Supongamos que tenemos para cada $x\in X$ un subconjunto (no vacío) $\mathscr{F}_x\subset\mathscr{P}(X)$ con las siguientes propiedades:
E1: si $A\in\mathscr{F}_x$ entonces $x\in A$;
E2: si $B\subset A$ y $B\in\mathscr{F}_x$ entonces $A\in\mathscr{F}_x$;
E3: si A, $B\in\mathscr{F}_x$ entonces $A\cap B\in\mathscr{F}_x$;
E4: dado $A\in\mathscr{F}_x$ existe $B\subset A$ tal que $B\in\mathscr{F}_x$, y $B\in\mathscr{F}_y$ para cada $y\in B$.
Probar:
  (a) $\mathcal{T}=\{B\in\mathscr{P}(X) : B\in\mathscr{F}_x\ \forall x\in B\}\cup\{\emptyset\}$ es una topología en X (observar que no se necesita la propiedad E4). Esta topología se llama la topología definida por los filtros de entornos de sus puntos.
  (b) Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico, los conjuntos
$$\mathscr{F}_x=\{A\in\mathscr{P}(X) : x\in U\subset A \text{ para algún } U\in\mathcal{T}\}$$
verifican los axiomas E1-E4. Los conjuntos $\mathscr{F}_x$ se llaman filtros de entornos del punto x.
  (c) El filtro de entornos de una topología definida por filtro de entornos coincide con éste.
  (d) Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico, la topología definida por los filtros de entornos de X coincide con $\mathcal{T}$.

(6) **Topologías definidas por operador de clausura.**

Un operador $\overline{(\cdot)} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ que verifica las siguientes propiedades:

C1: $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

C2: $A \subseteq \overline{A}\ \forall A \in \mathscr{P}(X)$;

C3: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}\ \forall A \in \mathscr{P}(X)$;

C4: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\forall A, B \in \mathscr{P}(X)$,

se llama un operador de clausura.

(a) Probar que, dado un operador de clausura, se tiene en X una topología definida por

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overline{X \setminus U} = X \setminus U.$$

Observación: Lo que estamos haciendo es definir la topología por sus cerrados, esto es,

$$F \text{ es cerrado} \iff \overline{F} = F.$$

(b) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supseteq A} F \qquad \text{donde } F \text{ es cerrado}$$

define un operador de clausura.

(c) Probar que si se parte de un operador clausura en un espacio X y se construye una topología como en (a), el operador clausura definido a partir de esta topología (como en (b)) es el original.

(d) Probar que si se parte de un espacio topológico X y se define un operador clausura como en (b), la topología definida a partir de este operador (como en (a)) es la original de X.

(7) Considerar el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes subconjuntos de X.

$A = \{(1/n, 0) :\ n \in \mathbb{N}\}$,

$B = \{(1 - 1/n, 1/2) :\ n \in \mathbb{N}\}$,

$C = \{(x, 0) :\ 0 < x < 1\}$,

$D = \{(x, 1/2) :\ 0 < x < 1\}$,

$E = \{(1/2, y) :\ 0 < y < 1\}$.

(8) Considerar las cuatro topologías definidas en el ejercicio **??**. Determinar la clausura del conjunto $K = \{1/n :\ n \in \mathbb{N}\}$ en cada una de ellas.

Redes

(9) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que las redes convergentes verifican las las siguientes propiedades:

R1: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a la constante.

R2: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x, entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

R3: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

R4: Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x^\alpha_k)_{k\in\Gamma_\alpha}$, que converge a $x^\alpha \in X$, y además $(x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x \in X$. Consideremos $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta\ \forall\beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \mapsto x^\alpha_{k_\alpha}$ converge a x.

(10) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que la fórmula

$$\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq A, \text{ y } x_\alpha \to x\}$$

define un operador de clausura. Probar que la clausura usual coincide con la recién definida.

(11) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathscr{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ. Probar que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ que converge a x (para la ida, considerar Γ el conjunto de pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$, U entorno abierto de x que contiene a x_α, con el orden $(\alpha, U) \preceq (\beta, V)$ si $\alpha \leq \beta$ y $V \subseteq U$).

(12) (a) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden entonces f es un homeomorfismo.
(b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es un homeomorfismo.
(c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Probar que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

(13) Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio topológico X tal que $X = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.
(a) Probar que si cada A_α es abierto entonces f es continua.
(b) Probar que si $\mathcal{A}$ es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.
(c) Encontrar un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.
(d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α. Mostrar que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

(14) Mostrar que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden del diccionario es metrizable (esto es, existe una métrica tal que la topología que induce la métrica coincide con la dada).

(15) **Topología de Zariski en k^n (tener en mente $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$).**
Consideremos el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k, $k[x] = k[x_1, \ldots, x_n]$. Para cada subconjunto $S \subseteq k[x]$ definimos el conjunto algebraico dado por S como

$$V(S) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in k^n : \, p(z_1, \ldots, z_n) = 0 \; \forall \, p \in S\}.$$

Verificar las siguientes propiedades
(a) Si $S \subseteq T \subseteq k[x]$, entonces $V(S) \supseteq V(T)$.
(b) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S.
(c) $V(\{0\}) = k^n$, y $V(\{1\}) = \emptyset$.
(d) Si $I, J \subseteq k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.
(e) Si $\{I_a\}_{a \in A}$ es una familia de ideales, entonces $V\left(\bigcup_{a \in A} I_a\right) = \bigcap_{a \in A} V(I_a)$.
Observación: los items (c), (d), (e) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la topología de Zariski de k^n.
(f) Los conjuntos $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$ forman una base para dicha topología.

(16) Caracterizar la topología de Zariski de k. Compararla con la usual en el caso en que $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$.

(17) Comparar la topología de Zariski en k^2 con la topología usual de k^2 ($k = \mathbb{R}$, ó $k = \mathbb{C}$).

Espectro de un anillo

(18) Sea A un anillo conmutativo con unidad. Sea $\operatorname{Spec} A$ el conjunto de todos los ideales primos de A. Para cada subconjunto E de A, notamos con $V(E)$ al conjunto de todos los ideales primos que contienen a E. Demostrar que

(a) si $\mathfrak{a}$ es el ideal generado por E entonces $V(E) = V(\mathfrak{a})$;

(b) $V(0) = \operatorname{Spec} A$, $V(A) = \emptyset$;

(c) si $(E_i)_{i\in I}$ es una familia cualquiera de subconjuntos de A entonces

$$V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i);$$

(d) $V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ para cualesquiera ideales $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ de A.

Estos resultados muestran que los conjuntos $V(E)$ satisfacen los axiomas de los conjuntos cerrados en un espacio topológico. La topología resultante se denomina la ***topología de Zariski*** en $\operatorname{Spec} A$.

(19) Para cada $f \in A$, se indica por $(\operatorname{Spec} A)_f$ el complemento de $V(f)$ en $\operatorname{Spec} A$. Estos conjuntos son abiertos. Probar que forman una base de abiertos para la topología de Zariski, y que

(a) $(\operatorname{Spec} A)_f \cap (\operatorname{Spec} A)_g = (\operatorname{Spec} A)_{fg}$;

(b) $(\operatorname{Spec} A)_f = \emptyset$ si y sólo si f es nilpotente;

(c) $(\operatorname{Spec} A)_f = \operatorname{Spec} A$ si y sólo si f es una unidad;

(d) $(\operatorname{Spec} A)_f = (\operatorname{Spec} A)_g$ si y sólo si $r((f)) = r((g))$ (recordemos que dado un ideal I, el radical $r(I)$ se define como

$$r(I) = \{x \in A : x^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}).$$

Observación: Si consideramos el subespacio $\operatorname{Specm} A$ de $\operatorname{Spec} A$ formado por los ideales maximales de A (con la topología de subespacio), una de las consecuencias del *nullstelensatz* (teorema de los ceros) de Hilbert es que, cuando k es un cuerpo algebraicamente cerrado, $\operatorname{Specm} k[x_1,\ldots,x_n]$ es homeomorfo a k^n con la topología de Zariski. Esto establece la relación entre las topologías definidas en los ejercicios anteriores.

(20) Sea A un anillo conmutativo (con unidad) y x un ideal primo. Probar que

(a) el conjunto $\{x\} \subset \operatorname{Spec} A$ es cerrado (se dice que x es un "punto cerrado") si y sólo si x es un ideal maximal;

(b) $\overline{\{x\}} = V(x)$;

(c) $y \in \overline{\{x\}}$ si y sólo si $x \subset y$;

(d) si x, y son puntos distintos de $\operatorname{Spec} A$, entonces existe un entorno de x que no contiene a y o viceversa.

Topología producto

Salvo que se especifique otra cosa, la topología en un producto de espacios topológicos es la producto.

(21) Sean X, Y espacios topológicos. Probar que $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son abiertas.

(22) Probar que la topología del orden del diccionario en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}_d$ es la topología discreta en $\mathbb{R}$. Comparar con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

(23) Sea $\mathbb{R}_l$ la topología cuya base de abiertos son los conjuntos de la forma $[a, b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Sea L una recta en el plano. Describir la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

(24) Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluir que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y, entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.

(25) Probar que X es Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) : \ x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.

(26) (a) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Probar que las funciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son inmersiones (i.e. definen un homeomorfismo con su imagen).
(b) Sea X un espacio con una distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Probar que la topología inducida por la métrica es la mínima tal que d es continua. (Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.)

(27) Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subseteq X_i$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?
(a) Si cada A_i es cerrado en X_i entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es cerrado en X.
(b) $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

(28) Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red de puntos en el espacio topológico $X = \prod_{i \in I} X_i$ (considerado con la topología producto). Probar que la sucesión $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a x si y sólo si la red $\pi_i(x_\alpha)$ converge a $\pi_i(x)$ en X_i para todo $i \in I$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?

Espacios irreducibles

Un espacio topológico X se dice *irreducible* si $X \neq \emptyset$ y si cada par de conjuntos abiertos no vacíos de X se cortan.

(29) Probar que un espacio topológico X es irreducible si y sólo si cada subconjunto abierto no vacío de X es denso.

(30) Probar que $\operatorname{Spec} A$ es irreducible si y sólo si el nilradical de A es un ideal primo (recordar que el nilradical de un anillo es igual a la intersección de todos sus ideales primos).

(31) Sea X un espacio topológico.
(a) Si Y es un subconjunto de X, irreducible con la topología de subespacio, entonces la clausura $\overline{Y}$ de Y en X también es irreducible.
(b) Cada subespacio irreducible de X está contenido en un subespacio maximal irreducible.
(c) Los subespacios maximales irreducibles de X son cerrados y recubren X. Se denominan *componentes irreducibles* de X. ¿Cuáles son las componentes irreducibles de un espacio de Hausdorff?
(d) Caracterizar las componentes irreducibles del espectro de un anillo $\operatorname{Spec} A$.