TOPOLOGÍA

Práctica 2

Durante esta práctica, σ_n denotará al n-simplex estándar de dimensión n,

$$\sigma_n := \left\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_0 + \dots + x_n = 1\right\}.$$

Homología y aplicaciones

(1) Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un retracto. Probar que la inclusión $\iota : A \hookrightarrow X$ induce un monomorfismo $\iota_* : H_*(A) \to H_*(X)$, y que si A es un retracto por deformación fuerte, entonces ι_* es un isomorfismo.

(2) Calcular $H_*(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$.

(3) Calcular $H_*(S^n)$, para todo $n \geq 1$ y mostrar que S^n no es contráctil.

(4) Probar que S^n no es un retracto de D^{n+1} y que toda función continua $f : D^n \to D^n$ tiene algún punto fijo.

(5) *a*) Sea $s_n : S^n \to S^n$ la simetría respecto al hiperplano $\{x_n = 0\}$. Probar que s_n no es homotópica a la identidad.

b) Sea $a : S^n \to S^n$ la aplicación antipodal ($a(x) = -x$). Probar que si n es par, entonces a no es homotópica a la identidad.

c) Probar que si $f : S^n \to S^n$ es homotópica a la identidad y n es par, entonces f tiene un punto fijo.

d) Probar que si n es par, no existe ninguna función $f : S^n \to S^n$ tal que los vectores x y $f(x)$ sean ortogonales (en $\mathbb{R}^{n+1}$) para todo $x \in S^n$. ¿Qué pasa si n es impar?

(6) Dado un espacio topológico X, se define la suspensión de X como $\Sigma(X) = X \times I/\sim$ donde $\sim$ es la menor relación de equivalencia tal que $(x, 0) \sim (y, 0)$ y $(x, 1) \sim (y, 1)$, para todos $x, y \in X$.

- Probar que $\Sigma(S^n)$ es homeomorfo a S^{n+1}.
- Una función continua $f : X \to Y$ induce una función $\Sigma(f) : \Sigma(X) \to \Sigma(Y)$, definida por $\Sigma(f)[(x, t)] = [(f(x), t)]$. Verificar que $\Sigma(f)$ está bien definida y resulta continua.
- Si X es arcoconexo, calcular $H_0(X)$ y $H_1(X)$.
- Probar que $H_n(\Sigma(X)) \simeq H_{n-1}(X)$, para $n \geq 2$.

(7) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Probar que toda función $f : U \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva es abierta.

(8) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos. Probar que si U y V son homeomorfos, entonces $n = m$.

(9) Probar que si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y existe $f : U \to \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva, entonces $n \leq m$.