TOPOLOGÍA
Práctica 2

Topologías inciales y finales

(1) Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Sean $Z = \prod_{i\in I} X_i$, $W = \coprod_{i\in I} X_i$, y para cada $i \in I$, $\pi_i : Z \to X_i$ la proyección i-ésima, y $\lambda_i : X_i \to W$ la inclusión.
  (a) Probar que π_i es abierta para todo $i \in I$.
  (b) Probar que λ_i es abierta y cerrada.

(2) Sea $\left\{X \xrightarrow{f_i} X_i\right\}_{i\in I}$ una familia inicial de funciones (o sea, X tiene la topología inicial inducida por las funciones f_i), y $f : X \to \prod X_i$ la función definida por

$$f(x) = (f_i(x))_{i\in I}.$$

Sea Z la imagen de f. Probar que $f : X \to Z$ es abierta.

(3) Consideremos el espacio de Sierpinski, $S = \{0, 1\}$, $\mathcal{T}(S) = \{\emptyset, \{1\}, S\}$. Sea X un espacio topológico.
  (a) Probar que $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si la función característica de A, $\chi_A : X \to S$, es continua.
  (b) Probar que la familia $\{\chi_U\}_{U\in\mathcal{T}_X}$ es una familia inicial para la topología de X.

(4) Probar que si $f : X \to Y$ es final e inyectiva entonces es inicial.

(5) Si $f : X \to Y$ es inicial y suryectiva entonces es cociente (es decir, f es final y suryectiva).

(6) Sea $f : X \to Y$ una función continua. Probar que si existe $g : Y \to X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$ entonces f es un cociente.

(7) Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada.
  (a) Sea X el subespacio $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $g = \pi_1|_X$. Mostrar que g es cerrada pero no abierta.
  (b) Sea Y el subespacio $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $h = \pi_1|_Y$. Mostrar que h no es abierta ni cerrada pero es cociente.

(8) Caracterizar el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ en cada uno de los siguientes casos
  (a) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$.
  (b) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$.

(9) Sea Z el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Z$ por la fórmula

$$\begin{cases} g((x,y)) &= (x,0) \text{ si } x \neq 0 \\ g((0,y)) &= (0,y) \end{cases}$$

  (a) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?
  (b) Mostrar que Z con la topología cociente inducida por g no es Hausdorff.

(10) Sean X un espacio topológico, $\sim$ una relación de equivalencia en X y $p : X \to X/_\sim$ la proyección al cociente.
Sea $R = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$. Probar que:
  (a) Si $X/_\sim$ es Hausdorff, entonces R es cerrado en $X \times X$.
  (b) Si $p\colon X \to X/_\sim$ es abierta y R es cerrado en $X \times X$, entonces $X/_\sim$ es Hausdorff .

(c) Si $p \times p : X \times X \to X/_\sim \times X/_\sim$ dada por $p \times p\ (x_1, x_2) = (p(x_1), p(x_2))$ es final, y R es cerrado en $X \times X$, entonces $X/_\sim$ es Hausdorff.

Grupos topológicos

(11) Probar que los siguientes espacios son grupos topológicos con las operaciones indicadas.
  (a) $(\mathbb{R}, +)$.
  (b) $(S^1, \cdot)$ ($\cdot$ el producto en $\mathbb{C}$).
  (c) $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ considerando a $GL(n, \mathbb{R})$ como subespacio de R^{n^2}.
  (d) Los subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$ de matrices de determinante 1, y $O(n, \mathbb{R})$ de matrices ortogonales.

(12) Sea G un grupo topológico y $\mathscr{F}_e$ el filtro de entornos de la identidad del grupo.
  (a) Probar que $A \subseteq G$ es abierto si y sólo si $g^{-1} \cdot A \in \mathscr{F}_e$ para todo $g \in A$.
  (b) $\mathscr{F}_e$ tiene las siguientes propiedades:
    (I) Si $U \in \mathscr{F}_e$, existe $V \in \mathscr{F}_e$ tal que $V \cdot V^{-1} \subseteq U$,
    (II) Si $U \in \mathscr{F}_e$, y $g \in G$, $g \cdot U \cdot g^{-1} \in \mathscr{F}_e$.
  (c) Sea G un grupo y $\mathscr{F}$ una familia de subconjuntos de G que verifican
    - $e \in U$ para todo $U \in \mathscr{F}$,
    - si $U, V \in \mathscr{F}$, entonces $U \cap V \in \mathscr{F}$,
    - si $U \in \mathscr{F}$ y $U \subseteq V$, entonces $V \in \mathscr{F}$

    y las propiedades (I) y (II) de la parte (b). Probar que existe una única topología en G que lo hace un grupo topológico con $\mathscr{F}_e = \mathscr{F}$.

(13) Sea G un grupo topológico. Probar que son equivalentes:
  (a) $\{e_G\}$ es cerrado;
  (b) G es Hausdorff;
  (c) G es T_0.

(14) Sean A, B subconjuntos de una grupo topológico G. Verificar que
  (a) $\overline{A} \cdot \overline{B} \subseteq \overline{A \cdot B}$.
  (b) $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$.
  (c) $g \cdot \overline{A} \cdot h^{-1} = \overline{(g \cdot A \cdot h^{-1})}$ para todo $g, h \in G$.
  (d) Deducir que si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces la clausura de H es también un subgrupo. Es más, si H es invariante, su clausura también.

(15) Sean G, H grupos topológicos. Probar que un morfismo de grupos $f : G \to H$ es continuo si y sólo si es continuo en el elemento identidad de G.

(16) Sea G un grupo topológico y H un grupo abstracto. Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Probar que son equivalentes:
  (I) El núcleo $\ker f$ es abierto.
  (II) f es continuo, considerando a H munido de la topología discreta.
  (III) f es continuo para cualquier topología que se ponga en H.

(17) (a) Un subgrupo H de un grupo topológico G es abierto si y sólo si su interior es no vacío.
  (b) Si H es un subgrupo abierto entonces es cerrado. ¿Es cierto que si H es cerrado entonces es abierto?
  (c) Si H contiene un subconjunto abierto entonces es abierto.

Un espacio topológico X se dice un *espacio homogéneo* si para todo par de puntos $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f(x) = y$.

Si X es un G-espacio, decimos que la acción de G en X es *transitiva* si para todo par de puntos $x, y \in X$, existe un elemento $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. En particular, si G actúa transitivamente en X, entonces X es un espacio homogéneo.

(18) Verificar que un grupo topológico es un espacio homogéneo.

(19) Sea G un grupo topológico, y $H \subseteq G$ un subgrupo. Sea G/H el espacio de coclases a izquierda con la topología cociente; esto es, definimos en G la relación de equivalencia

$$g \sim g' \iff gh = g' \text{ para algún } h \in H$$

y notamos con G/H al espacio cociente $G/_\sim$. Probar:
(a) La proyección $p : G \to G/H$ es abierta.
(b) H es cerrado si y sólo si G/H es T_1.
(c) H es abierto si y sólo si G/H es discreto.
(d) G actúa transitivamente en G/H, por lo tanto, G/H es un espacio homogéneo.
(e) Si H es invariante, entonces G/H es un grupo topológico y $p : G \to G/H$ es un *morfismo de grupos topológicos*, esto es, es morfismo de grupos y continuo. Además, si H es cerrado, G/H es Hausdorff.

Acciones de un grupo en un espacio topológico

Sea X un espacio topológico y G un grupo topológico. Una *acción* (a izquierda) de G en X es una función continua $G \times X \to X$, que denotaremos $(g, x) \mapsto g \cdot x$, tal que
(I) $e.x = x$ para todo $x \in X$, donde $e \in G$ es la identidad de G.
(II) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ para todo $x \in X$ y todo $g, h \in G$.

Un espacio topológico munido de una acción de G se llama un G-espacio.

(20) Probar que las siguientes definiciones dan a X una estructura de G-espacio.
(a) $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, y la acción es $n \cdot x = n + x$, para $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.
(b) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y la acción es $(n, m) \cdot (x, y) = (n + x, m + y)$.
(c) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$, y la acción es $\pm 1 \cdot x = \pm x$.
(d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1/2 \leq y \leq 1/2\}$, $G = \mathbb{Z}$, y la acción es $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$.

(21) Si X es un G-espacio, podemos definir en X una relación de equivalencia por

$$x \sim y \iff \exists\, g \in X \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

El espacio de cociente resultante lo notamos con $G\backslash X$, y consideramos en él la topología cociente.
(a) Probar que la proyección al cociente $p : X \to G\backslash X$ es abierta.
(b) Probar que si G es finito, p es cerrada.
(c) Probar que el espacio cociente $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ (ejercicio (20), (a)) es homeomorfo a S^1.
(d) Probar que el espacio cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})\backslash\mathbb{R}^2$ (ejercicio (20), (b)) es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.
(e) Probar que el espacio cociente $\mathbb{Z}\backslash X$ (ejercicio (20), (d)) es homeomorfo a la banda de Möbius (recordar que esta última se define como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación que identifica $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$, $y \in [0, 1]$).

Notación: al espacio cociente $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\backslash S^n$ (ejercicio (11), (c)) se lo nota con $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, y se llama el espacio proyectivo real de dimensión n.