TOPOLOGÍA
Práctica 3

Conexión

(1) Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, ¿qué puede implicar la conexión de X en una de las topologías respecto de la conexión en la otra?

(2) (a) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es conexo.
(b) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X. Demostrar que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $A \cup \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es conexo.

(3) ¿Es cierto que si X tiene la topología discreta, entonces X es totalmente disconexo? ¿Vale la vuelta?

(4) Mostrar que todo espacio irreducible es conexo.

(5) ¿Es cierto que si X es conexo, entonces para todo subconjunto A de X propio no vacío se tiene $\operatorname{Fr} A \neq \emptyset$? ¿Vale la vuelta?

(6) Considere los siguientes conjuntos con la topología del orden. Decidir cuáles son conexos.
(a) $\mathbb{N} \times [0,1)$.
(b) $[0,1) \times \mathbb{N}$.
(c) $[0,1) \times [0,1]$.
(d) $[0,1] \times [0,1)$.

(7) (a) Mostrar que entre los espacios $(0,1), (0,1]$ y $[0,1]$ no hay dos homeomorfos.
(b) Supongamos que $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ son inmersiones (esto es, son iniciales e inyectivas). Mostrar que no necesariamente X e Y son homeomorfos.

(8) (a) ¿Es el producto de espacios arco-conexos arco-conexo?
(b) Si $A \subset X$ y A es arco-conexo, ¿Es $\overline{A}$ arco-conexo?
(c) Si $f : X \to Y$ es continua y X es arco-conexo, ¿Es $f(X)$ arco-conexo?
(d) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de subconjuntos arco-conexos de X y $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$, ¿Es $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ arco-conexo?

(9) Mostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$.

(10) Calcular las componentes conexas y arco-conexas de $\mathbb{R}_l$.

(11) Definamos en X la relación $x \sim y$ si no existe separación $X = A \cup B$ de X en dos conjuntos abiertos y disjuntos tales que $x \in A$, $y \in B$. Mostrar que es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se llaman cuasi-componentes de X. Mostrar que cada componente conexa de X está contenida en una cuasi-componente.

(12) Determinar las cuasi-componentes, las componentes conexas y las arco-conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ (donde K denota el conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, y $-K$ denota el conjunto $\{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$).
$A = (K \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,1])$.
$B = (A \setminus \{(0,1/2)\})$.
$C = B \cup ([0,1] \times \{0\})$.
$D = (K \times [0,1]) \cup (-K \times [-1,0]) \cup ([0,1] \times -K) \cup ([-1,0] \times K)$.

(13) Sea X localmente arco-conexo. Mostrar que todo abierto conexo de X es arco-conexo.

(14) Sea X un espacio topológico tal que cada uno de sus puntos tiene una base de entornos conexos (i.e. X es localmente conexo). Probar que entonces, cada punto tiene un base de entornos abiertos y conexos.

(15) Probar que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ con más de un punto, es no numerable.

(16) Probar que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva es abierta.

(17) ¿Existe una función $f : [0, 1] \to [0, 1]$ estrictamente creciente tal que para todo $a < b$, $f((a, b))$ no sea conexo?

(18) Caracterizar las componentes conexas de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ y $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

(19) Sea G un grupo topológico y sea H un subgrupo. Probar que si H y G/H son conexos, entonces G es conexo.

(20) Probar que $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, el subgrupo de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ de las matrices con determinante 1 es conexo. Concluir que $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas.

(21) Mostrar que la componente conexa de la identidad de un grupo topológico G es un subgrupo normal y cerrado.

(22) Sea $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ el producto directo de anillos A_i. Probar que $\mathrm{Spec}(A)$ es la unión disjunta de subespacios abiertos (y cerrados) X_i, donde X_i es canónicamente homeomorfo a $\mathrm{Spec}(A_i)$.

Recíprocamente, sea A un anillo cualquiera. Probar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) $\mathrm{Spec}(A)$ es no conexo;
(ii) $A \simeq A_1 \times A_2$, donde ninguno de los anillos A_1, A_2 es el anillo cero;
(iii) A contiene un elemento idempotente distinto de $0, 1$.