TOPOLOGÍA
Práctica 4

Compacidad

(1) *a*) Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías en X. Supongamos que $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$. ¿La compacidad de alguna de estas topologías implica la compacidad de la otra?
b) Si X es compacto y Hausdorff tanto para $\mathcal{T}$ como para $\mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ o no son comparables.

(2) *a*) Mostrar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto en la topología del complemento finito.
b) ¿Es $[0, 1]$ compacto como subespacio de $\mathbb{R}$ en la topología

$$\mathcal{T}_c = \{U : \mathbb{R} \setminus A \text{ es numerable o todo } \mathbb{R}\}?$$

¿Lo es como subespacio de $\mathbb{R}_l$?

(3) Sean A, B dos subespacios compactos de un espacio X compacto y Hausdorff. Mostrar que existen abiertos disjuntos U, V tales que $U \supset A$, $V \supset B$.

(4) Sea $f : X \to Y$, con Y compacto y Hausdorff. Entonces f es continua si y sólo si el gráfico de f,

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\},$$

es cerrado en $X \times Y$.
(Sugerencia: Si G_f es cerrado y V es un entorno abierto de $f(x_0)$, encontrar un tubo que contenga a $\{x_0\} \times (Y \setminus V)$ que no corte a G_f.)

(5) Sean $X \to Y$, $Z \to Y$ funciones continuas, con X, Z compactos e Y Hausdorff. Consideremos el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Y. \end{tikzcd}$$

Probar que $X \times_Y Z$ es compacto.
Dar un contraejemplo en el que Y no sea Hausdorff.

(6) Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

(7) Mostrar que si $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y todos los X_α, salvo una cantidad finita, son compactos.

(8) Sea X un espacio localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es continua, ¿Es $f(X)$ localmente compacto? ¿Y si f es además abierta?

(9) Probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}$.

(10) Probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorafa a S^n. (Considerar la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$, $p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n)$.)

(11) Sea A un anillo conmutativo con unidad. Probar que $\operatorname{Spec} A$ es compacto. Más generalmente, probar que los conjuntos $(\operatorname{Spec} A)_f$ (ejercicio 19, práctica 1) son compactos.

Funciones propias

Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. Decimos que es *propia* si es *universalmente cerrada*, es decir, si:

(I) f es cerrada;
(II) Para toda función continua $Z \to Y$, $f_{(Z)}$ es cerrada, donde $f_{(Z)}$ es la función inducida en el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r] \arrow[d, "f_{(Z)}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r] & Y. \end{tikzcd}$$

(12) Probar:
 (a) un homeomorfismo es una función propia;
 (b) la composición de dos funciones propias es propia;
 (c) las funciones propias son *estables por cambio de base*. Esto significa que si $f : X \to Y$ es propia y $g : Z \to Y$ es cualquier función continua, entonces $f_{(Z)} : X \times_Y Z \to Z$ es propia.

(13) Sean $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$ propias. Entonces $f \times f' : X \times X' \to Y \times Y'$ es propia.

(14) Sea $h : X \to Y$ suryectiva y propia. Probar que si X es Hausdorff, entonces Y también lo es.

(15) Sea X un espacio topológico. Probar que son equivalentes:
 (I) X es compacto;
 (II) la función $X \to 1$ es propia;
 (III) para todo espacio Z, la proyección $\pi_2 : X \times Z \to Z$ es cerrada;
 (IV) toda red en X tiene una subred convergente.

(16) Dar un ejemplo de una función cerrada que no sea propia.

(17) Probar que si $f : X \to Y$ es propia, entonces las fibras $f^{-1}(y)$ son compactas para todo $y \in Y$.