TOPOLOGÍA
Práctica 5

Axiomas de separación Recordemos las definiciones. Un espacio X se dice:

- T_3 si para $F \subset X$ cerrado y $x \notin F$, x y F se pueden separar con abiertos;
- *regular* si es T_3 y T_1 (observar: es lo mismo pedir T_1 que T_2)
- $T_{3\frac{1}{2}}$ si para $F \subset X$ cerrado y $x \notin F$, x y F se pueden separar con funciones continuas;
- *completamente regular* si es $T_{3\frac{1}{2}}$ y T_1;
- T_4 si cerrados disjuntos se pueden separar por abiertos;
- *normal* si es T_4 y T_1.

(1) Mostrar que si un espacio X es regular, para todo par de puntos de X existen entornos de cada uno cuyas clausuras son disjuntas. Probar lo mismo tomando cerrados disjuntos en lugar de puntos.

(2) Probar que un conjunto ordenado es regular con la topología del orden.

(3) Demostrar que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

(4) Mostrar que si un producto arbitrario de espacios es Hausdorff, regular o normal, entonces cada factor lo es.

(5) Sea X un conjunto, y sean $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ dos topologías en X, tales que $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$. Si X es Hausdorff, regular o normal con alguna de las topologías, ¿qué se puede decir sobre la otra?

(6) Sea $p : X \to Y$ un cociente. Probar que si p es cerrada y X es normal entonces Y es normal.

(7) Probar que todo espacio localmente compacto y de Hausdorff es completamente regular.

(8) Mostrar que $\mathbb{R}_l^2$ es completamente regular, pero no es normal.

(9) Sea X un espacio completamente regular, y sean A y B subconjuntos de X cerrados, disjuntos y no vacíos. Probar que si A es compacto, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

(10) Probar que $\mathbb{R}^\omega$ con la topología caja es completamente regular.

Compactificación de Stone-Čech

(11) (a) Probar que toda función continua $f : S_\Omega \to \mathbb{R}$ es eventualmente constante (*sugerencia*: primero probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $\alpha \in S_\Omega$ tal que $|f(\alpha) - f(\beta)| < \epsilon$ para todo $\beta > \alpha$, y considerar para cada $\epsilon = 1/n$ los correspondientes α_n).
(b) Probar que la compactificación a un punto de S_Ω es la compactificación de Stone-Čech.

(12) Sea X un espacio completamente regular. Probar que X es conexo y si sólo si $\beta(X)$ es conexo (*sugerencia*: si $X = A \cup B$ es una separación de X, sea $f : X \to [0,1]$ definida por $f(x) = 0$ para $x \in A$, $f(x) = 1$ para $x \in B$).