TOPOLOGÍA
Práctica 6

Espacios de funciones

(1) Sea (Y, d) un espacio métrico. Probar que una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to Y$ converge a una función f en la topología de convergencia sobre compactos si y sólo si para cada compacto $C \subset X$, la sucesión $f_n| : C \to Y$ converge uniformemente a $f|C$.

(2) Similarmente a como se definió la topología uniforme en $\mathbb{R}^\omega$, definimos en Y^X la topología uniforme, para (Y, d) métrico. Primero tomamos la métrica acotada $\overline{d}(y_1, y_2) = \text{mín}\{d(y_1, y_2), 1\}$. Luego tomamos en Y^X la métrica $d'(f, g) = \sup\{\overline{d}(f(x), g(x)) : x \in X\}$. La topología uniforme en Y^X es entonces la inducida por la métrica d'.

Probar que la topología uniforme es más fina que la topología de convergencia sobre compactos, y que esta es más fina que la topología de convergencia puntual. Probar además que si X es compacto las dos primeras coinciden, y que si X es discreto la dos últimas coinciden.

(3) Probar que si (Y, d) es métrico, la topología compacto abierta y la de convergencia sobre compactos coinciden.

(4) Mostrar que en la topología compacto abierta, $\mathcal{C}(X, Y)$ es Hausdorff si Y lo es, y regular si Y lo es. (Sugerencia: Si $\overline{U} \subset V$, entonces $\overline{S(C, U)} \subset S(C, V)$.)

(5) Notemos con $\mathcal{C}'(X, Y)$ al conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ en alguna topología $\mathcal{T}$. Mostrar que si la evaluación

$$e : X \times \mathcal{C}'(X, Y) \to Y$$

es continua, entonces $\mathcal{T}$ contiene la topología compacto abierta.

(6) Mostrar que $ev : [0, 1]^{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q} \to [0, 1]$ no es continua. (Sugerencia: $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto y es completamente regular.)