# TOPOLOGÍA
Práctica 7

**Homotopía**

Notaciones varias:

- $*$: el singleton;
- $I$: $[0,1]$ con la topología usual;
- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, la esfera $n$-dimensional;
- $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, el disco $n$-dimensional;
- $IX = X \times I$, el cilindro de $X$;
- $CX = IX/\sim$, el cono de $X$; $i : X \to CX$ la inclusión en la base del cono;
- $[X,Y]$: el conjunto de clases homotópicas de funciones continuas de $X$ a $Y$, es decir,

$$[X,Y] = \{[f]/f : X \to Y \text{ continua}, [f] = [g] \Leftrightarrow f \sim g\} = \mathrm{Hom}(X,Y)/\sim .$$

(1) Probar que $i_0, i_1 : X \to IX$ definidas por $i_0(x) = (x,0)$ e $i_1(x) = (x,1)$ son equivalencias homotópicas, con la misma inversa $p : IX \to X$, $p(x,t) = x$. Además, $i_0 \sim i_1$.

(2) (a) Probar que $[*, X] = \pi_0(X)$ para todo espacio $X$.
(b) En general, probar que $[Y,X] = \pi_0(X)$ si $Y$ es contráctil.

(3) Sean $f : X \to Y$ continua y $Z$ otro espacio topológico. Definimos

$$f^* : [Y,Z] \to [X,Z], \quad f^*([g]) = [gf],$$

$$f_* : [Z,X] \to [Z,Y], \quad f_*([h]) = [fh].$$

(a) Probar que $f^*$ y $f_*$ están bien definidas.
(b) Probar que si $f \sim g$ entonces $f^* = g^*$ y $f_* = g_*$.
(c) Deducir que si $f$ es equivalencia homotópica entonces $f^*$ y $f_*$ son biyecciones. En particular, si $X$ e $Y$ son del mismo tipo homotópico, $\pi_0(X) = \pi_0(Y)$.

(4) Sea $G$ un grupo topológico. Probar que para todo espacio $X$, $[X,G]$ es un grupo con la operación

$$[f].[g] = [f.g],$$

donde $(f.g)(x) = f(x).g(x)$. Probar además que si $f : X \to Y$ es continua entonces $f^* : [Y,G] \to [X,G]$ es morfismo de grupos.

(5) Sean $f, g : X \to Y$ funciones homotópicas. Probar que $f$ es equivalencia homotópica si y sólo si $g$ lo es.

(6) (a) Hallar una función continua con inversa homotópica a izquierda pero no a derecha y viceversa.
(b) Probar que si una función continua tiene inversa homotópica a izquierda y a derecha, entonces es equivalencia homotópica.

(7) Probar que $f : X \to Y$ es equivalencia homotópica si y sólo si existen $g, h : Y \to X$ tales que $fg$ y $hf$ son equivalencias homotópicas.

(8) Probar que $i : X \to CX$ es una inclusión cerrada.

(9) Probar que $CX$ es contráctil para todo espacio $X$.

(10) Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1,\ x = 0$ ó $x = 1/n$ para algún $n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0,\ 0 \leq x \leq 1\}$, con la topología inducida de $\mathbb{R}^2$ (este espacio se conoce como el *peine*). Sea $x_0 = (0, 1) \in X$. Probar que $X$ es contráctil pero no existe una homotopía entre $\mathrm{id}_X$ y $c_{x_0}$ que sea relativa a $x_0$ (es decir, que toda homotopía entre la identidad y la constante $x_0$ va moviendo al punto durante la deformación).

(11) Sea $X$ el espacio que se obtiene al pegar dos copias del peine, identificando el punto $(0, 1)$ de ambas copias (es decir, $X$ es el cociente de la unión disjunta de dos copias del peine identificando tal punto de una copia con el mismo de la otra). Probar que $X$ no es contráctil.

(12) Sea $X$ un espacio topológico y $A$ un subespacio discreto con más de un punto. Probar que si $X$ es conexo entonces $A$ no es un retrácto débil de $X$.

(13) Sea $A$ el peine. Probar que la inclusión $i : A \to I^2$ es un retracto por deformación débil pero no un retracto por deformación fuerte.

(14) Sea $X$ un subespacio convexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $x_0$ un punto de $X$. Probar que $\{x_0\}$ es un retracto por deformación fuerte de $X$.

(15) Sea $f : X \to Y$ continua. Definimos el cono de $f$ como el espacio topológico $Cf$ que se obtiene tomando la unión disjunta de $CX$ e $Y$ y luego identificando los puntos $(0, x) \in CX$ con los puntos $f(x) \in Y$; es decir, pegamos la base del cono al espacio $Y$ usando $f$. Denotamos con $\overline{(x, t)}$ y con $\overline{y}$ las clases de los elementos en el cociente.
(a) Probar que $j : Y \to Cf$ definida por $j(y) = \overline{y}$ es subespacio (es decir, es inyectiva e inicial).
(b) Sea $g : Y \to Z$ una función continua. Probar que $gf : X \to Z$ es null-homotópica si y sólo si $g$ se extiende continuamente a $Cf$ (es decir, existe $\overline{g} : Cf \to Z$ tal que $\overline{g}j = g$).

(16) Probar que $X$ es contráctil si y sólo si $i : X \to CX$ es un retracto.

(17) Sea $f : X \to Y$ continua. Definimos el cilindro de $f$ como el espacio topológico $Z_f$ que se obtiene tomando la unión disjunta de $IX$ con $Y$, identificando luego los puntos $(x, 0)$ con $f(x)$; es decir, pegamos la base del cilindro al espacio $Y$ usando $f$. Denotamos con $\overline{(x, t)}$ e $\overline{y}$ las clases de los elementos en el cociente. Sea $i : X \to Z_f$ la inclusión $i(x) = \overline{(x, 1)}$ y sea $j : Y \to Z_f$ la inclusión $j(y) = \overline{y}$.
(a) Probar que $r : Z_f \to Y$ definida por $r(\overline{(x, t)}) = f(x)$ y $r(\overline{y}) = y$ está bien definida y es continua.
(b) Probar que $j$ es equivalencia homotópica con inversa $r$.