TOPOLOGÍA
Práctica 8

Grupo fundamental y revestimientos

Notación: $H : \omega \simeq_p \omega'$ denota una homotopía de caminos entre ω y ω'.

(1) Sean $H : \omega_1 \simeq_p \omega_2,\ G : \omega_2 \simeq_p \omega_3$ y $F : \omega_1' \simeq_p \omega_2',\ M : \omega_2' \simeq_p \omega_3'$ con $\omega_i(1) = \omega_i'(0)$. Probar que

$$(H + G) * (F + M) = (H * F) + (G * M)$$

(2) Probar que un grupoide es trivial si y sólo si es equivalente al grupoide singleton (grupoide de un solo elemento y una sola flecha).

(3) Sean X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea $\Omega X = \{\omega : I \to X\ ,\ \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$ con la topología del subespacio de la compacto abierta. Probar que $\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega X)$.

(4) Sean X espacio topológico, $x_0 \in X$ y $s \in S^1$ un punto cualquiera. Probar que $\pi_1(X, x_0) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{HTop}_*}((S^1, s), (X, x_0))$.

(5) Sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos en un espacio arco-conexo X. Probar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos $x_0 \xrightarrow{\omega,\ \omega'} x_1$, se tiene $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$.

(6) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio, y sea $f : A \to X$ una función continua, donde X es un espacio topológico arbitrario. Probar que si f se extiende a una función $g : \mathbb{R}^n \to X$, entonces, para todo $a \in A$, el morfismo $f_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, f(a))$ es el morfismo trivial.

(7) Sea $A \subset X$ un subespacio.
   (a) Probar que si A es un retracto de X con retracción $r : X \to A$, entonces para cualquier $a_0 \in A$ se tiene que $r_* : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$ es un epimorfismo e $i_* : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ es un monomorfismo (donde $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión).
   (b) Probar que si A es un retracto por deformación (débil o fuerte) entonces $\pi_1(A)$ y $\pi_1(X)$ son grupoides equivalentes. En particular, para todo $a_0 \in A$, $\pi_1(A, a_0) = \pi_1(X, a_0)$.

(8) Sea G un grupo topológico con multiplicación $\cdot$ y elemento neutro e. Dados $f, g \in \Omega(G, e)$, definimos el lazo $f \odot g$ como $(f \odot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$.
   (a) Mostrar que $\Omega(G, e)$ es un grupo con la operación $\odot$.
   (b) Probar que $\odot$ induce una nueva operación de grupo en $\pi_1(G, e)$, que por abuso notaremos $\odot$.
   (c) Demostrar que $\odot$ coincide con $*$ en $\pi_1(G, e)$ (*sugerencia*: considerar $(f * c_e) \odot (c_e * g)$).
   (d) Deducir que $\pi_1(G, e)$ es abeliano.

(9) Sea G un grupo topológico y H un subgrupo discreto. Probar que la proyección $p : G \to G/H$ es un revestimiento.

(10) Probar que $p : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$ definida por $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$ es un homeo local pero no es un revestimiento.

(11) Sean X, Y espacios topológicos. Probar que las proyecciones $p : X \times Y \to X$ y $q : X \times Y \to Y$ inducen un isomorfismo de grupos:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

(12) Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x \in \mathbb{Z}$ ó $y \in \mathbb{Z}\}$ y sea $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1\ ,\ z = 1$ ó $w = 1\}$ (donde S^1 lo vemos como subespacio de $\mathbb{C}$). Probar que $p : E \to B$ definida por $p(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$ es un revestimiento.

(13) Sea X espacio topológico. Probar que $f : X \to S^1$ puede levantarse a una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $p\tilde{f} = f$ (donde $p : \mathbb{R} \to S^1$ es la función definida por $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$) si y sólo si f es homotópicamente nula.

(14) Sea $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ el revestimiento usual del toro. Sea ω el camino

$$w(t) = ((\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t), (\cos 4\pi t, \operatorname{sen} 4\pi t)).$$

Dibujar w en el toro inmerso en $\mathbb{R}^3$, y calcular y dibujar un levantamiento $\tilde{\omega}$.

(15) Sean $f, g : S^1 \to S^1$ dadas por $f(z) = z^n$, $g(z) = 1/z^n$, donde $n \in \mathbb{N}$. Calcular $f_*, g_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$.

(16) Sea $p : X \to B$ un revestimiento, con B simplemente conexo y X arco-conexo. Probar que es un homeomorfismo.

(17) Probar que si $p : X \to B$ y $p : X' \to B'$ son revestimientos, también es un revestimiento el producto $p \times p' : X \times X' \to B \times B'$.

(18) Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ revestimientos.
(a) Probar que si las fibras $q^{-1}(z)$ de q son finitas entonces $q \circ p : X \to Z$ es un revestimiento.
(b) Probar que (a) es falso si las fibras no son finitas.

(19) Sea $p : X \to B$ un revestimiento. Supongamos que B es conexo y localmente conexo. Probar que si C es una componente de X entonces $p|_C : C \to B$ es un revestimiento.

(20) Sean $X \to B$ e $Y \to B$ revestimientos. Probar que el producto fibrado $X \times_B Y \to B$ es un revestimiento.

(21) Sea $p : X \to B$ un revestimiento, $Y \subset X$ un subespacio y supongamos que $p|_Y : Y \to B$ es revestimiento. Probar que también lo es el complemento $p|_{X-Y} : X - Y \to B$ (suponer B localmente conexo si es necesario).

(22) Sean $p_\alpha : X_\alpha \to B$ (con $\alpha \in I$) revestimientos, y sea

$$Z = \{(x_\alpha)_{\alpha \in I} : p_\alpha(x_\alpha) = p_\beta(x_\beta)\ \forall\ \alpha, \beta \in I\} = \prod_{\alpha\ B} X_\alpha.$$

Sea $q : Z \to B$ la función natural.
(a) Probar que si I es finito entonces q es un revestimiento.
(b) Encontrar un contraejemplo con I infinito y los X_α conexos para todo α.
(c) Probar que si los X_α y los p_α son todos iguales entonces q es un revestimiento siempre (suponer aquí que X es conexo).

(23) Calcular $\pi_1(X, x_0)$ en cada uno de los siguientes casos (como son todos arco-conexos elegir su punto base favorito). Algunos ejercicios se pueden encarar de distintas maneras: buscar retractos por deformación, revestimientos apropiados, acciones propiamente discontinuas.
(a) $X = S^1 \times [0, 1]$ (un cilindro).
(b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$ (un cilindro infinito).
(c) $X = M$, la banda de Möbius.
(d) $X = T = S^1 \times S^1$, el toro usual. Dibujar los generadores en una inmersión de T en $\mathbb{R}^3$.
(e) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una variedad lineal de dimensión 1 o 2 (o sea, una recto o un plano).

(24) Definimos la *botella de Klein* como el cociente del cuadrado $[0, 1]\times[0, 1]$, donde identificamos (x, y) con $(-x, -y)$. Calcular su grupo fundamental.

(25) Calcular el grupo fundamental del plano punteado en n puntos, $\mathbb{R}^2 - \{x_1, \dots, x_n\}$.

(26) Sea f un lazo en $\mathbb{C} - \{0\}$, basado en el punto $x_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$.
(a) Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ el revestimiento usual. Consideremos el lazo $h(s) = f(s)/\|f(s)\|$ en S^1; levantándolo a un camino $\widetilde{h}$ en $\mathbb{R}$, se tiene que $\widetilde{h}(1) = \widetilde{h}(0) + n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Probar que la clase de homotopía de caminos $[f] \in \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, x_0)$ determina n unívocamente, y viceversa. El entero n se llama el *número de rotación* de f respecto al 0.
(b) Supongamos que f es diferenciable a trozos. Probar que su número de rotación respecto al 0 es igual a la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_f \frac{dz}{z}$$

(*sugerencia*: si $z = g(s)$ es un camino arbitrario, diferenciable a trozos, en $\mathbb{C} - \{0\}$, considerar el camino $s \mapsto g(s)/\|g(s)\|$ en S^1 y tomar θ un levantado al revestimiento $\mathbb{R}$; entonces $g(s) = \|g(s)\|e^{2\pi i\theta(s)}$. Calcular $\int_g \frac{dz}{z}$).
(c) Sea $b_0 = 1 + 0i$. Existen isomorfismos estándar $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, x_0) \to \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, b_0) \to \pi_1(S^1, b_0) \to \mathbb{Z}$. Probar que el número de rotación de f es igual a la imagen de $[f]$ vía estos isomorfismos.

(27) Definimos el *grado* de una función continua $h : S^1 \to S^1$ de la siguiente manera:
Sea $b_0 = (1, 0) \in S^1$; elijamos un generador γ del grupo cíclico infinito $\pi_1(S^1, b_0)$ (sólo hay dos posibles opciones, diferenciadas por el signo). Si x_0 es cualquier punto de S^1, escojamos un camino α en S^1 de b_0 a x_0, y definamos $\gamma(x_0) = \widehat{\alpha}(\gamma)$. Entonces $\gamma(x_0)$ genera $\pi_1(S^1, x_0)$. El elemento $\gamma(x_0)$ es independiente de la elección del camino α (¿por qué?).
Dada ahora $h : S^1 \to S^1$, elijamos $x_0 \in S^1$ y pongamos $h(x_0) = x_1$. Conderemos el morfismo $h_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_1)$. Como ambos grupos con cíclicos infinitos, tenemos que

$$(*) \qquad h_*(\gamma(x_0)) = d.\gamma(x_1)$$

para algún $d \in \mathbb{Z}$, escribiendo el grupo aditivamente. El entero d se llama el *grado* de h y de senota por $\deg h$. El grado de h es independiente de la elección del generador γ; eligiendo el otro generador simplemente cambiaría el signo de ambos lados de $(*)$.
(a) Demostrar que d es independiente de la elección de x_0.
(b) Probar que si $h, k : S^1 \to S^1$ son homotópicas entonces tienen el mismo grado.
(c) Demostrar que $\deg(h \circ k) = \deg h. \deg k$.
(d) Calcular los grados de la aplicación constante, la aplicación identidad, la aplicación reflexión $\rho(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ y la aplicación $h(z) = z^n$.
(e) Probar que si $h, k : S^1 \to S^1$ tienen el mismo grado entonces son homotópicas.