TOPOLOGÍA
Práctica 9

Un poco de álgebra homológica

(1) (Lema de los 5)

Dado el siguiente diagrama conmutativo de grupos abelianos con filas exactas,

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "a"] & M_2 \arrow[r, "m_2"] \arrow[d, "b"] & M_3 \arrow[r, "m_3"] \arrow[d, "c"] & M_4 \arrow[r, "m_4"] \arrow[d, "d"] & M_5 \arrow[d, "e"] \\ N_1 \arrow[r, "n_1"'] & N_2 \arrow[r, "n_2"'] & N_3 \arrow[r, "n_3"'] & N_4 \arrow[r, "n_4"'] & N_5 \end{tikzcd}$$

probar que:

a) Si b y d son mono y a es epi entonces c es mono.
b) Si b y d son epi y e es mono entonces c es epi.
c) Concluir que si a,b,d y e son iso entonces c es iso.

(2) (Lema de la serpiente)

Sea

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 & \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de grupos abelianos con filas exactas.

a) Probar que hay una sucesión exacta

$$ker(a) \to ker(b) \to ker(c) \to coker(a) \to coker(b) \to coker(c).$$

b) Probar que si $M_1 \to M_2$ es mono, entonces también lo es $ker(a) \to ker(b)$.
c) Probar que si $N_2 \to N_3$ es epi, entonces también lo es $coker(b) \to coker(c)$.

(3) Probar que una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0,$$

induce una sucesión exacta larga en su homología

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{f_n} H_n(B) \xrightarrow{g_n} H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(B) \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots$$

El morfismo $\delta_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ se llama *morfismo de conexión*. Probar que se verifica la siguiente propiedad de naturalidad:

Dado un diagrama conmutativo de complejos de cadenas con filas exactas,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f^1"] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r, "g^1"] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f^2"'] & B_2 \arrow[r, "g^2"'] & C_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

el respectivo diagrama inducido en las homologías,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A_1) \arrow[r, "f_n^1"] \arrow[d, "\alpha_n"] & H_n(B_1) \arrow[r, "g_n^1"] \arrow[d, "\beta_n"] & H_n(C_1) \arrow[r, "\delta_n^1"] \arrow[d, "\gamma_n"] & H_{n-1}(A_1) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(A_2) \arrow[r, "f_n^2"'] & H_n(B_2) \arrow[r, "g_n^2"'] & H_n(C_2) \arrow[r, "\delta_n^2"'] & H_{n-1}(A_2) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

conmuta.

(4) Sean (C, d_1) y (D, d_2) dos complejos de cadenas. Probar que $(C \oplus D, d_1 \oplus d_2)$ es un complejo de cadenas y que $H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D)$.

(5) Probar que un morfismo de complejos de cadenas $f : C \to D$ es isomorfismo si y sólo si cada morfismo $f_n : C_n \to D_n$ es isomorfismo.

(6) Sea (B, d') un subcomplejo de (A, d). Probar que la inclusión $\iota : (B, d') \to (A, d)$ y la proyección $\rho : (A, d) \to (A/B, \overline{d})$ son morfismos de complejos.

(7) Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcular la homología del siguiente complejo de cadenas,

$$\ldots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \ldots,$$

donde $d_{2n} = 0$ y $d_{2_n+1}(x) = mx$.