Volumen I 1936-1937 Número 2

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

PUBLICADA POR LOS MIEMBROS FUNDADORES :

J. ALLENDE POSSE (Buenos Aires). — JOSÉ BABINI (Santa Fe). — FRANCISCO BERDIALES (Buenos Aires). — JUAN BLAQUIER (Buenos Aires). — CARLOS BIGGERI (Buenos Aires). — CLOTILDE BULA (Rosario). — ENRIQUE BUTTY (Buenos Aires). — JORGE CARRIZO RUEDA (Buenos Aires). — FÉLIX CERNUSCHI (Buenos Aires). — CARLOS DIEULEFAIT (Rosario). — ALEJANDRO ESTRADA (Buenos Aires). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — JOSÉ GIANNONE (Rosario). — ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires). — JOSÉ GONZÁLEZ GALÉ (Buenos Aires). — MANUEL GUITARTE (Buenos Aires). — WALTER S. HILL (Montevideo). — LUDOVICO IVANISSEVICH (Buenos Aires). — FLORENCIO JAIME (Buenos Aires). — FRANCISCO LA MENZA (Buenos Aires). — HILARIO MAGLIANO (La Plata). — OCTAVIO S. PICO (Buenos Aires). — JUAN OLGUÍN (Rosario). — ELBA RAIMONDI (Buenos Aires). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — RICARDO SILVEYRA (Buenos Aires). — JOSÉ SORTHEIX (Tucumán). — ESTEBAN TERRADAS (Buenos Aires). — FAUSTO TORANZOS (La Plata).

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »
684, PERÚ, 684

—

1937

SOBRE LAS SINGULARIDADES DE LAS FUNCIONES ANALITICAS

DEFINIDAS POR INTEGRALES DETERMINANTES

POR C. BIGGERI
(Buenos Aires)

La determinación de las singularidades de la función analítica $f(z)$, definida por la integral determinante:

$$\int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt, \qquad [1]$$

situadas sobre la recta de convergencia simple, puede hacerse sistemáticamente mediante el *criterio fundamental* que damos a continuación. Mediante dicho criterio pueden obtenerse teoremas sobre las singularidades periféricas de las funciones analíticas definidas por integrales determinantes, análogos a ciertos teoremas sobre las singularidades periféricas de las funciones analíticas definidas por series potenciales y *además algunos teoremas nuevos para las integrales, que no tienen su correlativo para las series.*

En esta nota demostraremos el criterio fundamental y algunos de los resultados obtenidos.

Sin restringir, en absoluto, la generalidad podemos suponer:

a) la abscisa de convergencia simple de la integral [1] *es nula;*

b) el punto, de la recta de convergencia, cuya singularidad o regularidad se desea reconocer es el origen, $z = o$.

(El caso en el cual la recta de convergencia de la integral [1] es C (siendo C un valor finito cualquiera), y el punto tomado sobre la recta de convergencia es arbitrario, se reduce al que vamos a tratar, mediante un simple cambio de variable).

TEOREMA I. — *Pongamos :*

$$Y_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} a(t) \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt, \qquad (n \text{ natural}). \qquad [2]$$

a) Es condición necesaria y suficiente para que $z = 0$ *sea un punto singular para* $f(z)$, *que se verifique :*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|Y_n|} = 1. \qquad [3']$$

b) Es condición necesaria y suficiente para que $z = 0$ *sea un punto regular para* $f(z)$, *que se verifique :*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|Y_n|} < 1. \qquad [3'']$$

Demostración : Puesto que $f(z)$ es regular en el semiplano $R(z) > 0$, podemos escribir :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)}{n!} \cdot \left(z - \frac{2}{3}\right)^n$$

siendo :

$$f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right) = (-1)^n \cdot \int_0^\infty a(t) \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt. \qquad [4]$$

Luego, poniendo :

$$L \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} \left| \int_0^\infty a(t) \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt \right|}$$

el punto $z = 0$ es *singular* para $f(z)$, si se verifica :

$$L = \frac{3}{2} \qquad [5]$$

y será *regular* si se tiene :

$$L < \frac{3}{2}. \qquad [6]$$

Ahora bien, respecto de la expresión :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log \left| \int_0^t a(\tau) \cdot d\tau \right|}{t}$$

caben dos posibilidades : *a) es igual a* $-\infty$; o bien : *b) es finito pero negativo;* pues si fuese igual a $+\infty$ o tuviera un *valor finito y positivo,* la abscisa de convergencia de la integral [1] sería *positiva*, contra lo supuesto. Por consiguiente, dado arbitrariamente un número positivo ε existe un $t_1 \equiv t_1(\varepsilon)$, tal que para todo $t \geq t_1$ es :

$$\left| \int_0^t a(\tau) \, . \, d\tau \right| < e^{\varepsilon t}. \qquad [7]$$

Llamemos M (ε) al extremo superior de todos los valores que la función :

$$\left| \int_0^t a(\tau) \, . \, d\tau \right|$$

toma en el intervalo $(0, t_1)$. Según [7] y la definición de M (ε), se deduce que : para todo t del intervalo $(0 \leq t < +\infty)$ es :

$$\left| \int_0^t a(\tau) \, . \, d\tau \right| < \mathrm{K}(\varepsilon) \, . \, e^{\varepsilon t} \qquad [8]$$

siendo :

$$\mathrm{K}(\varepsilon) \equiv 1 + \mathrm{M}(\varepsilon).$$

Pongamos :

$$\mathrm{A}_n \equiv \int_0^n a(t) \, . \, t^n \, . \, e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt.$$

Transformemos esta expresión mediante integración por partes :

$$\mathrm{A}_n = -\int_0^n \left(\int_0^t a(\tau) \, . \, \tau^n \, . \, d\tau \right) \cdot de^{-\frac{2}{3}t} + e^{-\frac{2}{3}n} \cdot \int_0^n a(\tau) \, . \, \tau^n \, . \, d\tau. \qquad [9]$$

De (8) y (9) se infiere :

$$|\mathrm{A}_n| < 2 \, . \, \mathrm{K}(\varepsilon) \, . \, n^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right) . \, n} + \frac{4}{3} \cdot \mathrm{K}(\varepsilon) \cdot e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right) t} \, . \, dt. \qquad [10]$$

Como la función :

$$t^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right) t}$$

es monótona creciente en el intervalo $o \leq t \leq n$, de (10) se deduce que, si tomamos $n > 1$ se verifica :

$$|\mathrm{A}_n| < 4 \, . \, \mathrm{K}(\varepsilon) \, . \, n^{n+1} \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right) . \, n}. \qquad [11]$$

Pongamos :

$$\mathrm{B}_n \equiv \int_{2n}^{\infty} a(t) \, . \, t^n \, . \, e^{-\frac{2}{3}t} \, . \, dt$$

(la función B_n existe en virtud de (4)).

Mediante integración por partes y teniendo en cuenta [8] se deduce que, para $t > 2n$ es :

$$\left| \int_{2n}^{t} a(t) \, . \, t^n \, . \, e^{-\frac{2}{3}t} \, . \, dt \right| < 4 \, . \, \mathrm{K}(\varepsilon) \, . \, t^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)t} +$$

$$+ \frac{8}{3} \cdot \mathrm{K}(\varepsilon) \cdot \int_{2n}^{t} t^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)t} \cdot dt$$

de donde, $\left(\varepsilon < \frac{2}{3}\right)$, se deduce :

$$| \mathrm{B}_n | \leq \frac{8}{3} \cdot \mathrm{K}(\varepsilon) \cdot \int_{2n}^{\infty} t^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-2\varepsilon\right)t} \cdot e^{-\varepsilon t} . dt. \qquad [12]$$

Como la función :

$$t^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-2\varepsilon\right)t}$$

es monótona decreciente en el intervalo $2n \leq t < +\infty$, si tomamos $\varepsilon < \frac{1}{12}$, de (12) se deduce :

$$| \mathrm{B}_n | < \frac{8}{3\varepsilon} \cdot \mathrm{K}(\varepsilon) \, . \, (2n)^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right) \cdot 2n}. \qquad [13]$$

Según la fórmula de Stirling y las (11) y (13), existe un número natural fijo n_0, suficientemente grande, tal que para $n \geq n_0$ es :

$$| \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n | < 4 \, . \, \mathrm{K}(\varepsilon) \, . \left(1 + \frac{2}{3n\varepsilon}\right) \cdot n \cdot n! \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{17}{18}\right)^n \cdot e^{3\varepsilon n}$$

de donde :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n |} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{18} \cdot e^{3\varepsilon}$$

y tomando límites para $\varepsilon \to 0$, es :

$$l \equiv \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n |} < \frac{3}{2}. \qquad [14]$$

Pongamos finalmente :

$$\mathrm{C}_n \equiv \int_{n}^{2n} a(t) \, . \, t^n \, . \, e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

Ahora bien, *supongamos que el punto* $z = 0$ *sea singular para* $f(z)$, o sea, que se verifique [5]. Sea δ un número positivo arbitrario pero fijo y q un número fijo positivo tal que:

$$l < q < \frac{3}{2}.$$

Según [5] y [14] a partir de un valor determinado de n, suficientemente grande, se verifican, respectivamente, que:

$$\frac{1}{n!}\,|\,(A_n + B_n) + C_n\,| < \left(\frac{3}{2} + \delta\right)^n$$

$$\frac{1}{n!}\,|\,A_n + B_n\,| < q^n$$

y por lo tanto:

$$\frac{1}{n!}\,|\,C_n\,| < \left(\frac{3}{2} + \delta\right)^n + q^n = \left(\frac{3}{2} + \delta\right)^n \cdot \left[1 + \left(\frac{q}{\frac{3}{2} + \delta}\right)^n\right]$$

de donde:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|\,C_n\,|} \leq \frac{3}{2} + \delta$$

y tomando límites para $\delta \to 0$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|\,C_n\,|} \leq \frac{3}{2}. \qquad [15]$$

Veamos que en la [15] no se puede verificar el signo menor. En efecto, si fuese:

$$l' \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|\,C_n\,|} < \frac{3}{2}$$

tomando un número positivo arbitrario fijo, q', menor que $\frac{3}{2}$ y mayor que l y l', será:

$$\frac{1}{n!}\,|\,C_n\,| < q'^n$$

$$\frac{1}{n!}\,|\,A_n + B_n\,| < q'^n$$

de donde:

$$\frac{1}{n!}\,|\,(A_n + B_n) + C_n\,| < 2q'^n,$$

o sea :

$$\mathrm{L} \leq q' < \frac{3}{2},$$

es decir : si en [15] se verifica el signo menor no se verifica la [5] sino la [6]; luego : es condición *necesaria* para que el punto $z = 0$ sea *singular* para $f(z)$ que se verifique :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | \mathrm{C}_n |} = \frac{3}{2}. \qquad [16]$$

Veamos que esta condición es también *suficiente*. En efecto, si no se verifica [5] se verifica necesariamente la [6], por lo tanto, si tomamos un número positivo fijo, q'', menor que $\frac{3}{2}$ y mayor que l y L, según [6] y [14] a partir de un valor de n suficientemente grande, serán :

$$\frac{1}{n!} | (\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n) + \mathrm{C}_n | < q''^n$$

$$\frac{1}{n!} | \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n | < q''^n,$$

de donde :

$$\frac{1}{n!} | \mathrm{C}_n | < 2q''^n,$$

o sea :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | \mathrm{C}_n |} \leq q'' < \frac{3}{2},$$

esto es, no se verifica [16]. Luego : *las igualdades* [5] *y* [16] *son equivalentes* y aplicando en [16] la fórmula de Stirling se obtiene la igualdad [3'].

La conclusión *a)* del teorema está probada.

Pasemos a la conclusión *b)*. Vimos que : si se verifica la [6], es decir, si el punto $z = 0$ es *regular* para $f(z)$, se verifica :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | \mathrm{C}_n |} < \frac{3}{2}, \qquad [17]$$

y recíprocamente, si se verifica [17] se verifica la [6]. Luego : *las desigualdades* [3''] *y* [17] *son equivalentes.*

Como complemento interesante a este teorema veamos que : *si existe* *límite ordinario de* $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right|}$, *para* $n \to \infty$, *existe también límite ordinario de* $\sqrt[n]{|Y_n|}$, *en el caso de que el punto* $z = 0$ *sea singular para* $f(z)$.

En efecto, supongamos que :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right|} \equiv L = \frac{3}{2}. \qquad [18]$$

Sea δ un número positivo arbitrario menor que $\frac{3}{2} - l$. A partir de un n, suficientemente grande, se verifican:

$$\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right| > \left(\frac{3}{2} - \delta\right)^n \qquad [19]$$

$$\frac{1}{n!}|A_n + B_n| < \left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + l - \delta\right)\right]^n \qquad [20]$$

según [18] y [14], respectivamente. De [19] y [20] se deduce:

$$\frac{1}{n!}|C_n| > \left(\frac{3}{2} - \delta\right)^n \cdot \left[1 - \left(\frac{3 - 2\delta + 2l}{2(3 - 2\delta)}\right)^n\right]$$

de donde:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}|C_n|} \geq \frac{3}{2} - \delta \qquad [21]$$

(pues : $3 - 2\delta + 2l < 2(3 - 2\delta)$), y tomando límites en [21], para $\delta \to 0$:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}|C_n|} \geq \frac{3}{2}. \qquad [22]$$

De [16] y [22] se deduce la existencia de *límite ordinario* de $\sqrt[n]{|Y_n|}$, si el punto $z = 0$ es *singular* para $f(z)$.

Este complemento nos será útil más adelante.

Hagamos algunas aplicaciones de este criterio.

Es sabido que el teorema de Vivanti de la teoría de las series potenciales se generaliza (con demostración análoga) a las funciones analíticas definidas por integrales determinantes; esto es: si la función generatriz es *positiva,* el punto real de la recta de convergencia es singular para la función analítica que define la integral.

Mediante nuestro criterio y este teorema análogo al de Vivanti, hemos logrado demostrar un teorema muy general para las integrales determinantes, a saber:

TEOREMA II. — *Si el valor principal, $\varphi(t)$, del argumento de la función (compleja) generatriz, $a(t)$ (supuesto, necesariamente, que a partir de un valor de t, suficientemente grande, $a(t)$ no se anula) de la integral determinante :*

$$\int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt, \qquad [1]$$

satisface a la condición :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log |\cos \varphi(t)|}{t} = 0; \qquad [23]$$

y las abscisas de convergencia, simple y absoluta, de la integral [1] son iguales, y además $\varphi(t)$ satisface a la condición de Darboux, entonces, el punto real de la recta de convergencia de la integral [1], es singular para la función analítica, $f(z)$, que define dicha integral.

Demostración : Sin restringir, en absoluto, la generalidad del teorema, podemos suponer que la abscisa de convergencia de la integral [1] es nula. Se trata, entonces de demostrar que el punto $z = 0$ es *singular* para $f(z)$.

Llamemos $\rho(t)$ al módulo de $a(t)$, y pongamos :

$$Y_n' \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} \rho(t) \cdot \cos \varphi(t) \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

$$Y_n'' \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} \rho(t) \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt.$$

Evidentemente es :

$$|Y_n| \geq |Y_n'|$$

y por el teorema de la media :

$$|Y_n| \geq |\cos \varphi(\xi)| \cdot Y_n'' \qquad [24]$$

siendo :

$$n < \xi \equiv \xi(n) < 2n.$$

Puesto que :

$$\sqrt[n]{|\cos \varphi(\xi)|} = \left(|\cos \varphi(\xi)|^{\frac{1}{\xi}}\right)^{\frac{\xi}{n}}$$

está comprendido entre $|\cos \varphi(\xi)|^{\frac{1}{\xi}}$ y $|\cos \varphi(\xi)|^{\frac{2}{\xi}}$, en virtud de (23) se verifica :

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\cos \varphi(\xi)|} = 1. \qquad [25]$$

Como las abscisas de convergencia, simple y absoluta, de la integral [1] son iguales, y habiendo supuesto que la abscisa de convergencia de [1] es nula, por el teorema análogo al de Vivanti, el punto $z = 0$ será *singular* para la función analítica definida por la integral :

$$\int_0^\infty \rho(t) \,.\, e^{-tz} \,.\, dt$$

por lo tanto, en virtud del teorema I (conclusión a)) se verifica :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{Y_n''} = 1. \qquad [26]$$

De [24], [25] y [26] se deduce :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{| Y_n |} \geq 1 \qquad [27]$$

y como $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{| Y_n |}$ no puede ser mayor que la unidad, según [27] es :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{| Y_n |} = 1,$$

y en virtud del teorema I, el punto $z = 0$ es *singular* para $f(z)$.

Si la abscisa de convergencia, que llamaremos C, *de la integral* [1] *se pudiese calcular por la fórmula :*

$$C = \lim_{t \to \infty} \frac{\log | a(t) |}{t} \qquad [28]$$

(en cuyo caso las abscisas de convergencia, simple y absoluta, de la integral [1] son *iguales), la condición* [23] *se puede substituir por la siguiente (que es más general) :*

$$\overline{\lim_{\zeta \to \infty}} \frac{\log | \cos \varphi(\zeta) |}{\zeta} = 0 \qquad [29]$$

siendo $| \cos \varphi(\zeta) |$ *el menor (en sentido amplio) de todos los valores de* $| \cos \varphi(t) |$, *en el intervalo* $n \leq t \leq 2n$.

En efecto, el teorema de la media da :

$$Y_n' = \rho(\theta) \,.\, \cos \varphi(\theta) \,.\, Y_n'''$$

siendo :

$$Y_n''' \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} t^n \,.\, e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

y θ un cierto valor de t, tal que: $n \leq \theta \leq 2n$. Por lo tanto:

$$|\mathrm{Y}_n| \geq \rho(\theta) \,.\, |\cos\varphi(\theta)| \,.\, \mathrm{Y}_n'''. \qquad [30]$$

Llamando $\rho(\omega)$ al *menor* (en sentido amplio) de los valores de $\rho(t)$, en el intervalo $n \leq t \leq 2n$, de [30] se deduce:

$$|\mathrm{Y}_n| \geq \rho(\omega) \,.\, |\cos\varphi(\zeta)| \,.\, \mathrm{Y}_n'''. \qquad [31]$$

Puesto que : $\sqrt[n]{\rho(\omega)} = \left[(\rho(\omega))^{\frac{1}{\omega}}\right]^{\frac{\omega}{n}}$ está comprendido entre $(\rho(\omega))^{\frac{1}{\omega}}$ y $(\rho(\omega))^{\frac{2}{\omega}}$ y como hemos supuesto que $\mathrm{C} = 0$, de [28] se infiere:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho(\omega)} = 1. \qquad [32]$$

Análogamente, como: $\sqrt[n]{|\cos\varphi(\zeta)|} = \left(|\cos\varphi(\zeta)|^{\frac{1}{\zeta}}\right)^{\frac{\zeta}{n}}$ está comprendido entre $|\cos\varphi(\zeta)|^{\frac{1}{\zeta}}$ y $|\cos\varphi(\zeta)|^{\frac{2}{\zeta}}$, según [29] es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\cos\varphi(\zeta)|} = 1. \qquad [33]$$

Ahora bien, la integral $\int_0^\infty e^{-tz} \,.\, dt$ (cuya abscisa es nula) define la función $g(z) \equiv \frac{1}{z}$, en la cual es:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|g^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right|} \equiv \frac{3}{2} \to \frac{3}{2}, \qquad \text{para } n \to \infty,$$

luego, en virtud del complemento al teorema I, se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{Y}_n'''} = 1. \qquad [34]$$

De [31], [32], [33] y [34] se deduce:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\mathrm{Y}_n|} \geq 1$$

lo que demuestra la conclusión.

Dos casos particulares interesantes en los cuales se cumple la condición [23] son:

a) El afijo de $a(t)$ varía, a partir de un valor de t, suficientemente grande, en un par de ángulos opuestos por el vértice (origen). (Téngase en cuenta que este par de ángulos opuestos por su vértice, siempre se puede transformar en un par de ángulos simétricos respecto del eje real, mediante la multiplicación de la generatriz, $a(t)$, por un cierto número complejo).

b) La generatriz, $a(t)$, es real y toma valores positivos y negativos (pero a partir de un valor de t, suficientemente grande, $a(t)$ no se anula).

Si la parte real de la generatriz, $a(t)$, a partir de un valor de t (suficientemente grande) es *positiva,* la igualdad de las abscisas de convergencia, simple y absoluta, de la integral [1], es, entonces, consecuencia de la condición [23]. Esto es, podemos enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA III. — *Si se verifican las dos condiciones siguientes :*

1°) *La parte real de la generatriz, $a(t)$, a partir de un valor de t, suficientemente grande, es positiva.*

2°) *El valor principal, $\varphi(t)$, del argumento de $a(t)$, satisface a la condición :*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log\cos\varphi(t)}{t} = 0; \qquad [35]$$

entonces, el punto real de la recta de convergencia de la integral [1], *es singular para la función analítica $f(z)$, que define dicha integral.*

Para demostrarlo, basta comprobar que bajo la condición [35] las abscisas de convergencia, simple y absoluta, de la integral [1] son iguales.

En efecto, llamemos C y C′ a las abscisas de convergencia simple y absoluta de la integral [1], respectivamente, y pongamos :

$$a(t) \equiv a_1(t) + i a_2(t).$$

Se tiene :

$$C = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log\left|\int_{[t]}^{t} a(\tau)\,.\,d\tau\right|}{t}$$

$$C' = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log\int_{[t]}^{t} |a(\tau)|\,.\,d\tau}{t}.$$

Dado arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, existe un $t_0 \equiv t_0(\varepsilon)$, tal que para $t \geq t_0$, según [35] es :

$$\sqrt{\overline{a_1(\tau)}^2 + \overline{a_2(\tau)}^2} \leq a_1(\tau)\,.\,e^{\varepsilon\tau}$$

de donde :

$$\int_{[t]}^{t} |a(\tau)|\cdot d\tau \leq e^{\varepsilon t}\cdot\int_{[t]}^{t} a_1(\tau)\,.\,d\tau. \qquad [36]$$

Además, se tiene :

$$\left| \int_{[t]}^{t} a(\tau) \, . \, d\tau \right| \geq \int_{[t]}^{t} a_1(\tau) \, . \, d\tau. \qquad [37]$$

Pongamos :

$$C'' \equiv \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \int_{[t]}^{t} a_1(\tau) \, . \, d\tau}{t}.$$

Según [36] es :

$$C' \leq \varepsilon + C''$$

y tomando límites para $\varepsilon \to 0$:

$$C' \leq C''. \qquad [38]$$

Según [37] es :

$$C' \geq C''. \qquad [39]$$

De [38] y [39] se deduce:

$$C \geq C'$$

y puesto que:

$$C' \leq C$$

se tiene:

$$C = C'.$$

Un caso particular interesante en el cual se cumplen las condiciones del teorema III, se presenta cuando es :

$$|\varphi(\tau)| \leq \tau < \frac{\pi}{2}; \qquad (\tau \text{ es fijo});$$

esto es, se obtiene, entonces, la generalización del teorema de Dienes de la teoría de las series potenciales.

Pasemos a otra propiedad de las integrales determinantes que se puede obtener mediante la aplicación del teorema fundamental.

TEOREMA IV. — *Si existe límite ordinario de la derivada logarítmica de la función generatriz, $a(t)$, para $t \to \infty$, y es :*

$$\lim_{t \to \infty} D \log a(t) = \alpha;$$

el punto $z = \alpha$ (que pertenece a la recta de convergencia), es singular para la función analítica, $f(z)$, que define la integral [1].

Este teorema recuerda al de Fabry de la teoría de las series potenciales, *pero no se puede decir que es su análogo.*

La demostración del teorema IV (que se efectúa mediante el teorema I) será objeto de una nota próxima.

Nótese que el teorema II no vale para las funciones analíticas definidas por series potenciales. En efecto; basta considerar la serie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n,$$

el valor principal, φ_n, del argumento de su coeficiente, $(-1)^n$, satisface a la condición :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log |\cos \varphi_n|}{n} = 0$$

análoga a la [23], y sin embargo, el punto $z = 1$ es *regular* para la función $\frac{1}{1+z}$. (Téngase en cuenta que : lo correlativo del punto en el cual la recta de convergencia de una integral determinante corta al *eje real* del plano z, es, en la serie de potencias, el punto en el cual la circunferencia de convergencia corta al *semieje real y positivo).*

RÉSUMÉ

L'étude des singularités de la fonction analytique, $f(z)$, définie par l'intégrale de Laplace :

$$\int_0^{\infty} a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt \qquad [1]$$

placées sur la droite de convergence simple, peut se faire systématiquement moyennant le *critérium fondamental* que je donne plus haut. En employant ce critérium on peut obtenir des théorèmes sur les singularités périphériques des fonctions analytiques définies par des intégrales de Laplace, analogues à certains théorèmes sur les singularités périphériques des fonctions analytiques définies par des séries potentielles et *de plus quelques théorèmes nouveaux pour les intégrales, qui n'ont pas des correspondants pour les séries.*

Dans la note présente je démontre le critérium fondamental et quelques uns des résultats obtenus.

Sans restreindre la généralité du théorème, on peut supposer que l'abscisse de convergence simple de l'intégrale [1] est *nulle* et donnons, alors, une condition nécessaire et suffisante pour que le point $z = 0$ soit *singulier* pour $f(z)$.

THÉORÈME I. — Posons [2] : *a) il est condition nécessaire et suffisante pour que le point $z = 0$ soit singulier pour $f(z)$, que l'égalité [3'] soit vérifiée;*

b) il est condition nécessaire et suffisante pour que le point $z = 0$ soit régulier pour $f(z)$ que l'inégalité [3''] soit vérifiée.

En outre, je démontre que : si le point $z = 0$ est singulier pour $f(z)$ et s'il existe de la *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right|}$, pour $n \to \infty$, il existe aussi de la *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{|Y_n|}$.

Moyennant le théorème I, je démontre les suivantes théorèmes.

THÉORÈME II. — *Si la valeur principale, $\varphi(t)$, de l'argument de la fonction génératrice, $a(t)$, de l'intégrale* [1] *satisfait à la condition* [23]; *et si, en outre, les abscisses de convergence, simple et absolue, de l'intégrale* [1] *sont égales, alors, le point réel de la droite de convergence de l'intégrale* [1], *est singulier pour $f(z)$.*

Si à partir d'une valeur de t (suffisammente grande), la partie réelle de la fonction génératrice, $a(t)$, est *positive*, l'égalité des abscisses de convergence, simple et absolue, de l'intégrale [1] est conséquence de la condition [23] : on a, alors, une extense généralisation du théorème de Dienes.

En outre, j'indique un théorème qui rappelle celui de Fabry, à savoir :

S'il existe de la limite ordinaire de la dérivée logarithmique de la fonction génératrice, $a(t)$, pour $t \to \infty$, et elle est :

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{D} \log a(t) = \alpha,$$

le point $z = \alpha$ (appartenant à la droite de convergence) est singulier pour $f(z)$.

GENERALIZACION DE UN TEOREMA DE CANTELLI

Por A. GONZALEZ DOMINGUEZ
(Buenos Aires)

Dada una variable casual x, que puede tomar uno de los valores de la sucesión

$$a_{-n}, \quad a_{-(n-1)}, \quad \ldots, \quad a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n \ldots \qquad [1]$$

con las respectivas probabilidades

$$p_{-n}, \quad p_{-(n-1)} \quad p_0, \quad \ldots, \quad p_1 \quad \ldots, \quad p_n \ldots$$

e indicando con x uno cualquiera de los valores de la sucesión [1], y con $f(x)$ la probabilidad correspondiente, la función

$$F(y) = \sum_{x=-\infty}^{y} f(x) \qquad [2]$$

que no es sino la probabilidad de que la variable casual x tome un valor no superior a y, se llama *función de probabilidades totales* o *función de repartición* de la variable casual x.

El profesor Cantelli, en una conocida memoria ([1]), ha enunciado el siguiente teorema :

Si para todo valor del índice k, y para todo entero positivo s existe $\sum_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\, x^s$, y se verifica la igualdad

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\, x^s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^s dx \qquad [s = 1, 2 \ldots],$$

([1]) Cantelli, *Un nuovo teorema a proposito del secondo teorema limite del calcolo delle probabilità. Rend. di Palermo* (52), página 416-424, 1928.

se verificará también, para todo u fijo,

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\, e^{-u|x-y|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-u|x-y|}\, dx,$$

uniformemente para todo y perteneciente a un intervalo finito fijo, arbitrariamente grande.

El profesor Cantelli agrega a continuación : « di questo teorema, suscettibile di generalizzazione, può darsi una dimostrazione elementare e breve, senza il sussidio di variabili casuali ausiliarie. Di esso avrò occasione di occuparmi presto ».

La anunciada generalización fué hecha el año siguiente no por Cantelli, sino por su discípulo R. Cultrera, quien demostró el teorema siguiente (1) :

« Sea una sucesión de leyes de probabilidades totales

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),$$

y una densidad continua de probabilidad $\varphi(x)$, que satisfaga la condición

$$\frac{[\psi(2n)]^n}{(2n!)}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, t^{2n} dt < 1$$

para n mayor que un cierto n_1, siendo ψ una función de la variable entera n, que tiende a ∞, para $n \to \infty$; si para todo $s = 0, 1, 2, \ldots$, se verifica

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^s df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \varphi(x)\, dx,$$

se verificará también

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u|x-y|} df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u|x-y|}\varphi(x)\, dx \text{ ».}$$

El anterior teorema de Cultrera, está comprendido, como caso muy particular, en el teorema siguiente :

Sea $\{f_k(x)\}$ una sucesión de leyes de probabilidades totales, y $f(x)$

(1) R. CULTRERA, *Intorno al secondo teorema limite del calcolo delle probabilità*, *Rend. di Palermo*, 53 (1929), página 476.

una ley de probabilidades totales tal que su correspondiente problema de momentos esté determinado; si se verifican las igualdades

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^s df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s df(x) \qquad [s = 0, 1, 2, \ldots],$$

también se verifica, para todo u, y uniformemente para todo y perteneciente a un intervalo finito arbitrario

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_u(x-y)\, df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_u(x-y)\, df(x),$$

siendo $k_u(x-y)$ un núcleo positivo de una *integral singular* derivada de la sumación de la integral de Fourier.

De este teorema, y de sus relaciones con el segundo teorema límite del cálculo de probabilidades, nos ocuparemos en un próximo trabajo. En la presente nota demostraremos un caso particular del mismo, a saber, el correspondiente al núcleo de la « integral singular de Poisson para el semiplano ».

TEOREMA.

Hipótesis : 1ª $\{f_k(x)\}$ y $f(x)$ funciones de repartición;

2ª el problema de momentos de $f(x)$ está determinado;

3ª $$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^n df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n df(x) \qquad [n = 0, 1, 2, \ldots].$$

Tesis :

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\, df_k(x)}{(p-x)^2+q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\, df(x)}{(p-x)^2+q^2},$$

para q fijo, uniformemente para todo p comprendido en un intervalo finito, arbitrariamente grande.

La demostración se basa en el siguiente

Lema. — Hipótesis : Las mismas del teorema anterior.

Tesis :

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda-x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{\lambda-x}. \qquad [1]$$

$$\lambda = p + iq; \quad q \neq 0.$$

Demostración : Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{\lambda-x} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^\nu}{\lambda^{\nu+1}} + \frac{1}{\lambda^n}\frac{x^n}{\lambda-x},$$

resulta, haciendo

$$m_\nu^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu df_k(x)$$

$$m_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu df(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda - x} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{m_\nu^k}{\lambda^{\nu+1}} + \frac{1}{\lambda^n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df_k(x)}{\lambda - x}$$

para n fijo.

Al tender k a infinito, el primer sumando tiende a

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{m_\nu}{\lambda^{\nu+1}}.$$

Demostremos que el segundo sumando tiende a

$$\frac{1}{\lambda^n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df(x)}{\lambda - x} \qquad (n \text{ fijo}).$$

Se trata de demostrar que

$$\left| \frac{1}{\lambda^n}\int \frac{x^n df_k(x)}{\lambda - x} - \frac{1}{\lambda^n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df(x)}{\lambda - x} \right| < \varepsilon,$$

para $k > k(\varepsilon)$.

Esta igualdad se cumple; en efecto

$$\left| \frac{1}{\lambda^n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df_k(x)}{\lambda - x} - \frac{1}{\lambda^n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df(x)}{\lambda - x} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda^n|} \cdot \frac{1}{|\lambda \operatorname{sen} \theta|} \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^n df_k(x) - \int_{-\infty}^{\infty} x^n df(x) \right|,$$

por ser $\dfrac{1}{|\lambda \operatorname{sen} \theta|}$ el mínimo de $\dfrac{1}{\lambda - x}$ $\qquad (\lambda = re^{i\theta})$.

Pero el segundo miembro de la desigualdad puede hacerse tan pequeño como se quiera, para k suficientemente grande, en virtud de la hipótesis [3] del teorema, ya que el factor que multiplica la diferencia de integrales tiene un valor fijo.

Hemos, pues demostrado que

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda - x} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{m^\nu}{\lambda^{\nu+1}} + \frac{1}{\lambda^n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df(x)}{\lambda - x}.$$

Pero el segundo miembro no es sino

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{\lambda - x},$$

con lo que queda demostrado el lema. La hipótesis [3] es esencial. En efecto, si no se cumpliera, es decir, si el problema de momentos de $f(x)$ no estuviera determinado, habría infinitas funciones $f(x)$ que satisfarían a la desigualdad

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^n df_k(x) - \int_{-\infty}^{\infty} x^n df(x) \right| < \varepsilon,$$

para $k > k(\varepsilon)$; y no se llegaría, por tanto, a ninguna conclusión determinada.

El teorema resulta ahora fácilmente; en efecto, las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda - x},$$

cumplen la acotación

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda - x} \right| \leq \frac{1}{I(\lambda)},$$

denotando con $I(\lambda)$ la parte imaginaria de λ; en efecto, la variación total de cualquiera de las $f_k(x)$ es igual a 1, ya que son funciones de repartición.

Las funciones holomorfas $\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda - x} \right\}$ están, pues, uniformemente acotadas en todo recinto acotado completo que no corte el eje real. El teorema de Vitali es, pues aplicable, y por lo tanto la convergencia es *uniforme* en todo recinto del tipo descripto. Tomando las partes imaginarias en ambos miembros de la igualdad [1], de página 65, resulta

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q df_k(x)}{(p-x)^2 + q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q df(x)}{(p-x)^2 + q^2},$$

uniformemente para todo p comprendido en un intervalo arbitrario, finito, y para q fijo. El teorema queda así demostrado.

Hagamos, finalmente, algunas observaciones.

La primera es que la condición

$$\frac{[\psi(2n)]^n}{(2n!)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, t^{2n} dt < 1,$$

desde un n en adelante, se cumple ampliamente si el problema de momentos de $\varphi(t)$ está determinado; esto es consecuencia fácil del clásico teorema de Carleman ([1]), según el cual el problema de momentos de $f(x)$ está determinado, si la serie

$$\sum \frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n}}}$$

es divergente.

La segunda es que la expresión

$$\frac{u}{2} e^{u|x-y|}$$

que interviene en el teorema de Cantelli-Cultrera, es el núcleo de la integral singular de Picard.

Observemos finalmente, que de nuestro teorema se deduce fácilmente, en virtud de un teorema de Cantelli ([2]), el segundo teorema límite del Cálculo de Probabilidades; y que, inversamente, supuesto conocido este último teorema, el del texto se deduce inmediatamente, recordando una clásica proposición de Grommer-Hamburger ([3]).

RÉSUMÉ

On démontre le théorème suivant : Étant donnée une succession de fonctions de repartition $\{ f_k(x) \}$, et une fonction de repartition $f(x)$ dont le problème des moments est determiné, si l'on a les égalités :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n df(x)$$

pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots, n$, on a aussi

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{(p-x)^2+q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{(p-x)^2+q^2}$$

pour q fixe, et uniformément pour tout p appartenant a un intervalle fixe, mais arbitrairement grand.

([1]) CARLEMAN, *Les fonctions quasi-analytiques*, página 80.

([2]) CANTELLI, *loc. cit.*

([3]) HAMBURGER, *Math. Ann.*, 81 (1920), página 283.

COMUNICACIONES

Una aplicación del símbolo $\Delta^m D^m$

Por José Babini
(Santa Fe)

Si se considera una serie de potencias $f(z, h) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n (hn + \alpha) z^n$ en cuyos coeficientes interviene un parámetro h y se transforman esos coeficientes

$$\varphi_n (hn + \alpha) = \varphi_n (h'n + \alpha + (h - h') n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \Delta^m \varphi_n (h'n + \alpha)$$

$$\Delta\alpha = h - h'$$

se tendrá, en el círculo de convergencia de la serie,

$$f(z, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} z^n \Delta^m \varphi_n (h'n + \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_m}{m\,!} \sum_{n=m}^{\infty} D^m z^n \Delta^m \varphi_n (h'n + \alpha)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m\,!} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^m D^m z^n \varphi_n (h'n + \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m\,!} \Delta^m D^m f(z, h'),$$

y en los casos particulares en que los coeficientes φ_n sean enteros respecto de α se podrá expresar la serie $f(z, h)$ en forma finita. Así, si

$$\varphi_n (hn + \alpha) = a_n P_p (hn + \alpha)$$

donde $P_p(\alpha)$ es un polinomio de grado p, tendremos, indicando con $y = \sum\limits_{n=0} a_n z^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_p (hn + \alpha) z^n = \sum_{m=0}^{p} \frac{z^m}{m\,!} \Delta^m D^m \sum_{n=0} a_n P_p (\alpha) z^n = \sum_{m=0}^{p} \frac{z^m}{m\,!} y^{(m)} \Delta^m P_p (\alpha)$$

con $\Delta\alpha = h$. Por ejemplo, si

$$y = e^z \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_p \frac{(hn+\alpha)}{n!} z^n = e^z \sum_{m=0}^{p} \frac{z^m \Delta^m \mathrm{P}_p(\alpha)}{m!}$$

$$y = \frac{1}{1-z} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_p (hn+\alpha) z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{m=0}^{p} \left(\frac{z}{1-z}\right)^m \Delta^m \mathrm{P}^p(\alpha)$$

$$y = (1+z)^\beta$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{(n} \mathrm{P}_p (hn+\alpha)}{n!} z^n = (1+z)^\beta \sum_{m=0}^{p} \left(\frac{z}{1+z}\right)^\beta \frac{\beta^{(m}}{m!} \Delta^m \mathrm{P}_p(\alpha), \text{ etc.}$$

Consideremos, por último, como $f(z, h)$ la serie

$$\sum_{n=0} \frac{(hn+\alpha)^{(n,k}}{n!} z^n,$$

donde $(hn+\alpha)^{(n,k}$ representa la factorial de base $hn+\alpha$, grado n y diferencia k. Esta serie, convergente en el círculo de radio

$$\left| \frac{(h-k)^{\frac{h-k}{k}}}{h^{\frac{h}{k}}} \right|$$

teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=0} \frac{\alpha^{(n,k}}{n!} z^n = (1+kz)^{\frac{\alpha}{k}},$$

podrá entonces expresarse por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(hn+\alpha)^{(n,k}}{n!} z^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \Delta^m \mathrm{D}^m (1+kz)^{\frac{\alpha}{k}},$$

con $\Delta\alpha = h$.

Hiperconvergencia de las series de Dirichlet cuyos exponentes forman una sucesión de densidad máxima infinita

Por Sixto Ríos
(Madrid)

1. Un teorema fundamental de V. Bernstein [1] demuestra que en las series de Dirichlet:

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

cuya sucesión de exponentes $\{\lambda_n\}$ tiene densidad máxima finita, las abscisas de holomorfía e hiperconvergencia son iguales, resultado que ha sido generalizado a algunas clases de series de Dirichlet de densidad máxima infinita [2].

Se plantea entonces la cuestión siguiente : en el caso de series de Dirichlet cuya sucesión de exponentes tiene densidad máxima infinita « la abscisa de hiperconvergencia (estrecha o no) debe ser necesariamente igual a la abscisa de holomorfía, o puede suceder que aquélla sea superior a ésta. Del mismo modo, no se sabe si al menos una cierta parte de la banda comprendida entre las rectas de convergencia y holomorfía (cuando dicha banda no es nula) es seguramente un dominio de hiperconvergencia o puede suceder que ninguna parte de dicha banda sea un dominio de hiperconvergencia de la serie » [3].

El objeto de la primera parte de esta nota es resolver esta cuestión demostrando que *en las series de Dirichlet*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

cuya sucesión de exponentes $\{\lambda_n\}$ *tiene densidad máxima infinita la abscisa de hiperconvergencia (estrecha o no) puede ser mayor o igual que la*

[1] *Progrés récents de la théorie des séries de Dirichlet,* página 103, col. Borel, París, 1933.

[2] Libro citado, página 176.

[3] Esta cuestión se encuentra así planteada en el libro de V. Bernstein citado, páginas 193-4.

de holomorfía, contrariamente a lo que sucede en las series en que $\{\lambda_n\}$ posee densidad máxima finita, en que ambas abscisas son necesariamente iguales. Objeto principal de la segunda parte es dar un teorema que relaciona las abscisas de hiperconvergencia y holomorfía de las series en que $\{\lambda_n\}$ tiene densidad máxima infinita.

2. Siguiendo la notación de V. Bernstein [1] designamos con **H**, **O**, **S**, **C** las abscisas de holomorfía, hiperconvergencia, hiperconvergencia estrecha y convergencia respectivamente.

Comenzamos formando la serie de Dirichlet :

$$f(s) = \Sigma (-1)^n e^{-\lambda_n s} \qquad [1]$$

en que

$$\lambda_{2n} = ln, \qquad \lambda_{2n+1} = ln + \frac{1}{n(n+1)},$$

para la cual se demuestra que

$$-\infty = \mathbf{H} < \mathbf{O} = \mathbf{S} = -1 < \mathbf{C} = 0, \qquad [2]$$

y que por tanto resuelve la primera parte del problema de Bernstein.

Se demuestra :

a) Si en la serie [1] se agrupan los términos de lugares $2n$ y $2n+1$, la serie de polinomios exponenciales obtenida :

$$\sum_1^{\infty} \left(e^{-sln} - e^{-s\left(ln + \frac{1}{n(n+1)}\right)}\right)$$

converge uniformemente en todo recinto finito del semiplano $\mathrm{R}(s) > -1$ con lo cual resulta

$$\mathbf{O} \leq \mathbf{S} \leq -1;$$

b) Cualquier sucesión parcial de la sucesión total de sumas parciales de la serie numérica

$$\sum_1^{\infty} u_n, \qquad \left(u_{2n} = n, \qquad u_{2n+1} = -ne^{\frac{1}{n(n+1)}}\right)$$

obtenida haciendo $s = -1$ en [1], es divergente, con lo que resulta : $-1 < \mathbf{O}$ y, por tanto

$$\mathbf{O} = \mathbf{S} = -1;$$

c) La serie de Dirichlet

$$\varphi(s) = \sum_1^{\infty} (-1)^n e^{-e^{\lambda_n} s}$$

[1] *Loc. cit.*, páginas 32-33.

define una función analítica regular en $s = 0$, ya que por formar sus exponentes una sucesión de densidad máxima finita se le pueda aplicar un teorema de V. Bernstein (¹).

Pero de un teorema de Hardy (²) resulta que por ser $\varphi(s)$ holomorfa en $s = 0$ es $f(s)$ una función entera, es decir, $\mathbf{H} = -\infty$ con lo que queda demostrada la relación [2].

3. Queda en pie la parte de cuestión relativa a si necesariamente una banda parcial de la banda de holomorfía es campo de hiperconvergencia, en estas series. La contestación es negativa, como se ve aplicando el método precedente a la serie

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-s l n}$$

para la que resulta :

$$-\infty = \mathbf{H} < \mathbf{0} = \mathbf{S} = \mathbf{C} = 0.$$

4. También en las series con sucesión $\{\lambda_n\}$ de densidad máxima infinita puede presentarse el caso de que $\mathbf{H} = \mathbf{0} = \mathbf{S} > \mathbf{C}$, es decir,

(¹) El teorema se enuncia así : *Sea la serie*

$$f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

de abscisa de convergencia finita y cuya sucesión de exponentes $\{\lambda_n\}$ *es medible y de densidad* D. *Una condición necesaria y suficiente para que* $f(s)$ *sea holomorfa en* $\mathrm{R}(s) < 0$ *sobre el segmento* $|t| < l$ *del eje imaginario es que exista una función* $\varphi(z)$ *tal que :* 1° *Sea holomorfa en el sector*

$$|\arg z| \leq d < \frac{\pi}{2}$$

y satisfaga en él, por pequeño que sea ε *y para* $|z|$ *suficientemente grande, la condición*

$$|\varphi(z)| < e^{|(\pi \mathrm{D} - e)|\operatorname{sen}\theta| + \varepsilon| r};$$

2° *Para todos los valores de* n *:* $\varphi(\lambda_n) = a_n \mathrm{C}'(\lambda_n)$, *loc. cit.*, página 103.

(²) El teorema se enuncia así : *Si la serie*

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

tiene abscisa de convergencia finita y la serie

$$\Sigma a_n e^{-s e^{\lambda_n}}$$

define una función holomorfa en el origen, la función definida por la serie

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

es entera. (The application to Dirichlet's series of Borel's method of summation, Proc. London Math. Loc. cit., tomo VIII, 1909.)

hiperconvergencia estrecha en que todo el semiplano de holomorfía, que es el único caso que se presenta en las series en que $\{\lambda_n\}$ posee densidad máxima finita estudiadas por V. Bernstein.

El mismo método seguido en los ejemplos anteriores conduce a demostrar que, en efecto, para la serie :

$$\sum_1^\infty (-1)^n e^{-\lambda_n s}, \quad [\lambda_{2n} = ln, \quad \lambda_{2n+1} = ln + e^{-n} - e^{-(n+1)}]$$

se verifica

$$-\infty = \mathbf{H} = \mathbf{O} = \mathbf{S} < \mathbf{C} = 0.$$

5. Con las hipótesis hechas para la serie $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ en el teorema de Bernstein enunciado en la nota (1) y en virtud de otro teorema de Bernstein (2) se pueden agrupar los términos de aquélla serie, obteniéndose una serie de polinomios exponenciales

$$f(s) = \sum_1^\infty \mathrm{P}_k(s) \tag{3}$$

hiperconvergente en el semiplano $\mathrm{R}(s) > -h$ y se puede poner en forma de serie de Dirichlet de coeficientes variables :

$$f(s) = \sum_1^\infty \mathrm{A}_k(s)\, e^{-\lambda_{n_k} s} \tag{4}$$

en que los coeficientes verifican la acotación :

$$|\mathrm{A}_k(s)| < e^{-(h-\varepsilon)\lambda_{n_k}}. \tag{5}$$

y consideramos la serie

$$\varphi(s) = \Sigma a_n e^{-s \cdot l\lambda_n}$$

y la de polinomios correspondientes a la [3]

$$\varphi(s) = \sum_1^\infty p_k(s) \tag{6}$$

se ve fácilmente que

$$p_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{P}_k(x)\, x^{s-1} dx \tag{7}$$

(1) *Loc. cit.*, página 128.

(2) *Bemerkungen zum Konvergenzprobleme...*, Rend. Pal., 1913.

de donde se obtiene con un cálculo sencillo la acotación:

$$|p_k(s)| < e^{-(h-\varepsilon)\lambda_{n_k}} e^{-s \cdot l\lambda_{n_k}} \qquad [8]$$

que permite afirmar que la serie [6] converge uniformemente en todo recinto finito del plano s. Esto nos conduce a enunciar el siguiente teorema:

I. *Sea* $\{\lambda_n\}$ *medible y de densidad D. Si la abscisa de convergencia de la serie*

$$f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$$

es cero, es condición suficiente para que la serie

$$\varphi(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-s \cdot l\lambda_n}$$

admita una sucesión parcial hiperconvergente en todo el plano, que exista una función $\psi(z)$ *holomorfa en*

$$|\arg z| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

y tal que se verifique en este sector para $|z|$ *suficientemente grande, y por pequeño que sea* ε, *la condición*

$$|\psi(z)| < e^{-r[h\cos\Theta - \pi D|\operatorname{sen}\Theta| - \varepsilon]} \quad (h > 0, \quad z = re^{i\Theta})$$

y que además para todo valor de n sea

$$\psi(\lambda_n) = a_n C'(\lambda_n).$$

Para la abscisa de holomorfía se obtiene un resultado análogo mediante los teoremas de Hardy (1) y Bernstein enunciados en las notas al pie (1) y (2) de la página 73.

II. *En las mismas hipótesis del teorema I, es condición suficiente para que la serie*

$$\varphi(s) = \Sigma a_n e^{-s \cdot l\lambda_n}$$

defina una función entera, que exista una función $\psi(z)$ *holomorfa en*

$$|\arg z| \leq \alpha < \frac{\pi}{2},$$

(1) Hardy-Riesz, página 18.

y tal que se verifique en este sector para $|z|$ *suficientemente grande y por pequeño que sea* ε *la condición*

$$|\psi(z)|\, e^{-r[h\cos\Theta - \pi D|\operatorname{sen}\Theta| - \varepsilon]} \qquad (h \geq 0, \quad re^{i\theta})$$

y que además para todo valor de n *sea*

$$\psi(\lambda_n) = a_n C'(\lambda_n).$$

Se observa que en la condición final de este teorema no aparece $h > 0$ como en el teorema I.

Si suponemos $h = 0$ de la fórmula [7] se obtiene la acotación

$$p_k(s)\,| < \text{Máx}\, |t_k(s)|\, e^{-sl\lambda_{n_k}} \qquad [9]$$

más general que la [8]. Ello nos permite enunciar el siguiente teorema :

III. *Si la abscisa de convergencia de la serie*

$$f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

es cero y si además existe una función $\psi(z)$ *con las propiedades señaladas en el teorema II, la abscisa de hiperconvergencia estrecha de la serie*

$$\psi(s) = \Sigma a_n^{-sl\lambda_n}$$

está determinada por la fórmula

$$\mathbf{S} = \overline{\lim}\, \frac{\log[\text{Máx}\,|A_k(s)|]}{l\lambda_{n_k}}$$

Ejemplos de las series a las que se aplican estos teoremas son los expuestos en los párrafos 2, 3 y 4.

6. Sin servirse de la acotación [5] de Bernstein, y mediante la expresión [7] y el teorema de los tres círculos, se obtiene un teorema del que resulta como caso particular el teorema I :

IV. *Si una sucesión parcial de la serie*

$$f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

converge uniformemente en un entorno de $s = 0$ *y la serie*

$$\varphi(s) = \Sigma a_n e^{-sl\lambda_n}$$

tiene abscisa de convergencia finita, la sucesión de los mismos índices relativa a esta serie, converge uniformemente en todo recinto finito del plano.

7. Se observa que los teoremas precedentes han permitido obtener las abscisas de hiperconvergencia y holomorfía de la serie

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

de propiedades relativas a la serie

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n^{(1)} s}$$

en que $\lambda_n^{(1)} = e^{\lambda_n}$ suponiendo que $\{ \lambda_n \}$ sea medible o, más general, de densidad máxima; pero si $\{ \lambda_n^{(1)} \}$ no es de densidad máxima finita, y si lo es la sucesión $\{ \lambda_n^{(2)} \}$ (tal que $\lambda_n^{(2)} = e^{\lambda_n^{(1)}}$), una aplicación reiterada de los teoremas precedentes permite pasar de las propiedades de la serie

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

a las abscisas de hiperconvergencia y holomorfía de la serie

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n^{(2)} s};$$

y, en general, de la

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n^{(k)} s}$$

a la

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Ahora bien, se demuestra fácilmente al siguiente teorema :

V. *Dada una sucesión $\{ \lambda_n \}$ de densidad máxima infinita, entre las sucesiones $\{ \lambda_n^{(k)} \}$ existe una primera, para un cierto valor finito de k, que es de densidad máxima finita.*

Este teorema final pone de manifiesto el alcance de nuestros teoremas que se extienden, pues, a toda las series de Dirichlet.

8. Recordemos finalmente el importante teorema de Bohr (8) siguiente :

Sea la serie

$$f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

cuyos exponentes verifican la condición

$$\overline{\lim} \frac{\log n}{\lambda_n} = \mathrm{L} < +\infty,$$

mientras que sus coeficientes a_n *son tales que*

$$\overline{\lim} \frac{\log |a_n|}{\lambda_n} = 0,$$

supongamos además que $f(s)$ *es holomorfa y de orden finito* k *en un cierto semiplano* $\mathrm{R}(s) > \sigma$, *entonces se verifica que la abscisa de hiperconvergencia es :*

$$\mathbf{0} \leq \frac{\sigma + k\mathrm{L}}{1 + k}.$$

Una aplicación del ejemplo del § 3 consiste en probar que la acotación dada por el teorema de Bohr no puede mejorarse, en general; pues si para dicha serie fuera

$$\mathbf{0} \leq \frac{\sigma + k\mathrm{L}}{1 + k} - \varepsilon,$$

teniendo en cuenta que para dicha serie es $\mathrm{L} = 1$, y

$$\mu(\sigma) = \frac{1}{1} - \sigma \ (9),$$

si se toma

$$\sigma < -\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{3}{2}\right),$$

resulta

$$\mathbf{0} \leq -\frac{\varepsilon}{2},$$

lo que está en contradicción con lo demostrado en § 3.

Madrid, diciembre de 1936.

Algunos complementos a la teoría de límites de las funciones reales en espacios abstractos

Por J. Rey Pastor
(Buenos Aires)

TEOREMAS SOBRE LÍMITES DOBLES. — Como complemento a la teoría desarrollada en nuestra «Teoría general de funciones» [1], definidas en espacios topológicos, damos algunos teoremas cuya demostración, que omitimos por falta de espacio, es sencilla, apoyándose en los fundamentos allí expuestos, o bien en las clásicas lecciones de Hahn.

Sea $f(x, y)$ una función real definida en un semientorno del punto (x_0, y_0) del espacio abstracto topológico $E_x \times E_y$, es decir, en un semientorno X_0 de x_0 y en un semientorno Y_0 de y_0. Adoptaremos estas notaciones:

$$\overline{\lim}_{x_0} f(x, y) = L(y) \qquad \underline{\lim}_{x_0} f(x, y) = l(y)$$

$$\overline{\lim}_{y_0} L(y) = L \qquad \underline{\lim}_{y_0} l(x) = l$$

$$\overline{\lim}_{x_0, y_0} f(x, y) = \Lambda \qquad \underline{\lim}_{x_0, y_0} f(x, y) = \lambda.$$

De acuerdo con los conceptos introducidos en nuestra citada obra, estableceremos las siguientes definiciones:

La *oscilación superior* de $f(x, y)$ en el punto x_0 es *uniforme hacia arriba* en el conjunto Y si para cada $\varepsilon > 0$ hay un semientorno $X_0(\varepsilon)$ de x_0 tal que para cada x de $X_0(\varepsilon)$ y cada y de Y se verifica:

$$f(x, y) < L(y) + \varepsilon \qquad (x < X_0(\varepsilon),\ y < Y). \tag{1}$$

Diremos que la oscilación superior es *uniforme hacia abajo* en Y si en cada semientorno X_i de x_0 hay algún punto x_i tal que

$$f(x_i, y) > L(y) - \varepsilon \qquad (x_i < X_i,\ y < Y). \tag{2}$$

Análogamente se dirá que la *oscilación inferior* en x_0 es *uniforme hacia abajo* en Y si para cada $\varepsilon > 0$, se verifica:

$$f(x, y) > l(y) - \varepsilon \qquad (x < X_0(\varepsilon),\ y < Y) \tag{3}$$

[1] Curso dictado en la Universidad de Buenos Aires, capítulo I, 1935.

y uniforme hacia arriba si

$$f(x, y) < l(y) + \varepsilon \qquad (x_i < X_i,\ y < Y). \tag{4}$$

Diremos que la *oscilación superior* (inferior) hacia arriba o hacia abajo es *uniforme en el punto* y_0 si las condiciones anteriores se verifican en un conjunto $Y(\varepsilon)$, semientorno de y_0, que depende de ε.

Si en (1) se sustituye $L(y)$ por $f(x_0, y)$ resulta la continuidad supe rior respecto de x, *uniforme en* Y; y si en (3) se sustituye $l(y)$ por $f(x_0, y)$ resulta la continuidad inferior respecto de x, *uniforme* en Y.

Si en esta continuidad lateral respecto de la variable X, uniforme respecto del parámetro y (también llamada *equicontinuidad*) el conjunto Y es un semientorno $Y_0(\varepsilon)$ de y_0 dependiente de ε, resulta la continuidad superior o inferior, *uniforme en el punto* y_0.

Finalmente, la continuidad respecto de x *uniforme en el punto fijo* y_0 es la suma de ambas continuidades y puede caracterizarse también así:

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon \qquad (x < X_0(\varepsilon),\ y < Y_0(\varepsilon))$$

siendo $Y_0(\varepsilon)$ un entorno de y_0 dependiente de ε, mientras que en la equicontinuidad es fijo.

Los teoremas anunciados, de los cuales se pueden deducir muchos otros aplicables a series, integrales en campos infinitos, etc., son los siguientes:

TEOREMA I. — *Si la oscilación superior de* $f(x, y)$ *en* x_0 *es uniforme en el punto* y_0 *hacia arriba, es* $\Lambda \leq L$; *si es uniforme hacia abajo, es* $\Lambda \geq L$.

Por tanto, si es uniforme en ambos sentidos es $\Lambda = L$.

Análogamente, si la oscilación inferior es uniforme hacia arriba es $\lambda \leq l$, y si es uniforme hacia abajo es $\lambda \geq l$.

TEOREMA II. — *Condiciones necesarias y suficientes para la existencia del límite doble* $\Lambda = \lambda$ *en el punto* (x_0, y_0) *son:*

1° *Oscilación en* x_0, *superior hacia arriba e inferior hacia abajo, uniformes en el punto* y_0;

2° $L = l$.

Que estas condiciones son suficientes resulta como corolario del teorema anterior. Condiciones equivalentes, necesarias y suficientes, se obtienen permutando x_0 con y_0.

TEOREMA III. — *Condiciones suficientes para la continuidad superior (inferior) de* $f(x, y)$ *en el punto* (x_0, y_0) *son :*

1° *Continuidad superior (inferior) en x_0 de la función $f(x, y_0)$;*

2° *Continuidad superior (inferior) de $f(x, y)$ respecto de x en x_0, uniforme en el punto y_0.*

Su demostración directa es sencilla y más breve todavía es deducirlo del primero.

TEOREMA IV. — *Condiciones necesarias y suficientes para la continuidad de $f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) son:*

1° *Continuidad respecto de y en y_0 para $x = x_0$;*

2° *Continuidad respecto de x en x_0, uniforme en el punto y_0.*

APLICACIÓN A LOS ALGORITMOS INTEGRALES DE CONVERGENCIA. — En diversas ocasiones hemos expuesto un doble teorema (1) sobre los algoritmos integrales de convergencia, análogo a los ya conocidos para los algoritmos sumatorios y que se extiende fácilmente a las curvas situadas en un espacio topológico:

TEOREMA I. — *Son condiciones* SUFICIENTES *para la conservación del límite nulo de las sucesiones y funciones acotadas:*

$$\text{I)} \qquad \lim_{t \to t_0} \lambda_r(t) = 0 \qquad \lim_{t \to t_0} \int_p^q |\lambda(r, t)|\, dr = 0$$

para todo intervalo finito (p, q) siendo t_0 un punto de un espacio topológico y r un parámetro real que define el camino de integración (c, ∞).

$$\text{II)} \qquad \sum_c^\infty |\lambda_r(t)| < \mathrm{K} \qquad \int_c^\infty |\lambda(r, t)|\, dr < \mathrm{K}$$

para cada t de un semientorno T_0 de t_0.

Es decir, de las condiciones I y II se deduce:

(1) *Series divergentes*. Curso de 1926, Madrid, 1927. *Un algoritmo general de convergencia*, en *Rev. Mat. Hisp.-Amer.*, 1929. *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, Buenos Aires, 1931.

Aunque nunca atribuímos importancia a este teorema (véase el prólogo del libro citado) por existir ya los modelos de Lebesgue y Toeplitz en problemas análogos, el señor Raff parece concedérsela excesiva, cuando tanto empeño pone en asignar la fecha de 1929 a la memoria publicada por su maestro y colega de la Universidad de Tübingen, el profesor Knopp, en *Math. Zeitschrift*, volumen 31 (1930), quien demostró independientemente el mismo teorema. Véase la reseña del señor Raff en el *Jahrbuch über die Fortsch. der Math.*, 55_{I}, página 124, sobre nuestra nota, y en el 55_{II} (aparecido en 1936, aunque lleva la fecha de 1929), sobre la memoria de Knopp.

Lamentamos la molestia que parecen causarle las fechas, pero nada cabe hacer para remediarlo.

Si $s(r)$ está acotada y si $s(r) \to 0$ para $r \to \infty$ se verifica :

$$\lim_{t \to \infty} \int_c^\infty \lambda(r, t)\, s(r)\, dr = 0.$$

De este teorema resultan fácilmente condiciones *suficientes* para la regularidad del algoritmo (conservación de límites finitos), agregando la condición :

$$\text{III)} \qquad \lim_{t \to t_0} \sum_c^\infty \lambda_r(t) = 1 \qquad \lim_{t \to t_0} \int_c^\infty \lambda(r, t)\, dr = 1.$$

En nuestro libro ya citado ([2]), página 44, completamos este teorema con otro que parcialmente es recíproco, cuyo enunciado copiamos literalmente :

« TEOREMA II. — *Es condición* NECESARIA *para la conservación de los límites nulos que para cada valor de r se verifique :*

$$\text{I}' \qquad \lim \lambda_r(t) = 0 \qquad \lim \int_p^q \lambda(r, t)\, dr = 0 \qquad \text{para} \qquad t \to \infty.\text{»}$$

Salta a la vista que si bien para las sucesiones s_r la condición *necesaria* de la izquierda $\lim \lambda_r(r) = 0$ es la misma que la condición *suficiente,* contenida en el teorema I, no acontece lo mismo para las funciones $s(r)$, pues en esta condición *necesaria* figura como integrando el factor de convergencia $\lambda(r, t)$, mientras que en las condiciones *suficientes* figura el valor absoluto $|\lambda(r, t)|$.

Tenemos, pues, para las funciones $s(r)$, dos condiciones *necesarias :*

$$\text{I}') \quad \lim \int_p^q \lambda(r, t)\, dr = 0 \qquad\qquad \text{II}) \quad \int_c^\infty |\lambda(r, t)| < \mathrm{K}$$

y dos condiciones *suficientes,* I y II, claramente separadas en los enunciados y en las demostraciones. Sin embargo, el señor Raff, quizá por causa del idioma, lo ha entendido de otro modo ([1]).

([1]) Debemos declarar, en justificación de la agria crítica *(Jahrbuch,* 57_{I}, pág. 255) que en algunos párrafos del libro (recopilación de apuntes de clase, cuya accidentada impresión ya insinuada en su prólogo, obligó a lanzarlo incompleto en forma de fascículo primero, cortando varios capítulos, la reseña histórico-bibliográfica y hasta el índice general) se deslizó la frase *condiciones necesarias y suficientes,* siendo innecesario aclarar que estrictamente se refiere a la columna de la izquierda (sucesiones); para la columna de la derecha (funciones) convendría quizás agregar « y las » antes de la palabra *suficientes,* y así se hizo ya en la fe de erratas agregada al libro para evitar malentendidos. Inconvenientes son éstos de la

En la conferencia dada en 1933 en el *Seminario Matematico e Fisico di Milano* (1) hemos subrayado esta laguna existente entre ambas condiciones, adoptando como punto de partida en la definición de los factores la condición *necesaria*

$$\text{I}' \qquad \lim_{t\to t_0} \lambda_r(t) = 0 \qquad \lim_{t\to t_0} \int_p^q \lambda(r, t)\, dr = 0$$

que es la menos exigente, a fin de completarla con condiciones suplementarias en cada tipo de problemas, a la manera de Lebesgue. He aquí el párrafo aludido (pág. 195), copiado literalmente (2) :

« El teorema fundamental expresa :

« *Para todo factor de convergencia se verifica :*

$$si \qquad s_r \to 0 \qquad también \qquad S(t) \to 0.$$

« *Si existe coeficiente de convergencia y*

$$s_r \to s \qquad se\ verifica \qquad S(t) \to \lambda s.$$

exposición simultánea, de dos teorías, cuya correlación no es completa, agravada con la limitación de espacio, que obligó a una condensación excesiva ; pero estando como están bien bien claros los enunciados y las demostraciones de los dos teoremas fundamentales, todo lector de buena fe deberá interpretarla correctamente ; preferimos, pues, la explicación arriba apuntada, que es la más favorable al riguroso crítico.

También es interesante reproducir su otra censura : « El relator considera como falta grave que escasean las indicaciones bibliográficas ; una obra que pretenda ser estimada como trabajo sistemático y propulsivo no puede prescindir de ellas y ciertamente no hay imposibilidad de agregar datos bibliográficos aun en las *circunstancias más difíciles* ».

Criterio tan estrictamente germánico, erigido en dogma, condena sin apelación a casi toda la literatura matemática francesa, pero deja indenne del fulminante anatema a nuestro modesto trabajo, cuyos capítulos finales y bibliografía *completa* hasta el día, esperan pacientemente que la comisión de publicaciones de la Facultad disponga de fondos para imprimir los pliegos restantes que deben completar el fascículo. Un resumen de ello, forzosamente breve, fué publicado aparte.

(1) *Rendiconti del Sem. Mat. Fis. Mil.*, volumen VII, 1933.

(2) Solamente hemos corregido una falta de puntuación : un punto y aparte que debía ser punto y seguido, o viceversa ; bien insignificante si se tiene en cuenta que fué impresa la conferencia en castellano y sin ver nosotros las pruebas.

También está bien claro el párrafo que sigue relativo a las sucesiones :

« Para que la sumatriz de toda *sucesión* convergente tenga límite finito es *preciso* que exista coeficiente de convergencia finito. Como corolario resulta que las condiciones *necesarias y suficientes* para la conservación de todos los límites finitos son : que se cumplan las condiciones I y II y exista coeficiente $\lambda = 1$. »

« Recíprocamente, para que la sumatriz de toda variable que tienda a cero tienda también a cero, es NECESARIO *que las funciones $\lambda_r(t)$, $\lambda(r, t)$ sean factores de convergencia, es decir, cumplan las condiciones I y II. »*

Todo lector verá claramente que en la primera parte (condiciones *suficientes*) sólo se citan las *sucesiones* s_r, y en la segunda (condiciones *necesarias*) se habla de toda variable *(sucesión* o *función)* y se escriben ambos tipos de factores $\lambda_r(t)$, $\lambda(r, t)$. Sin embargo, el escrupuloso crítico tubinguiano (y aquí no cabe la disculpa del idioma, pues se trata de fórmulas) nos atribuye como textual un enunciado elaborado a su manera, compuesto con un trozo de la definición, otro del teorema y otro original, de cuyo conglomerado resulta la conclusión inexacta que necesita para poder afirmar que el problema por él abordado en su memoria de *Math. Zeitsch.,* página 605 (1936), es nuevo [1].

Esta novedad es muy relativa después de los numerosos trabajos publicados sobre integrales singulares, de los cuales se pueden cosechar métodos y resultados útiles para la teoría de los algoritmos; y por ello no concedimos mayor interés que el didáctico a nuestro complemento posterior [2] encaminado a llenar la laguna entre las condiciones necesarias y las suficientes, sin más que utilizar, convenientemente modificada, una idea de Lebesgue contenida en su famosa memoria de los *Annales de Toulouse.* Así dimos como suficiente para la conservación de límites nulos, el siguiente criterio intermedio entre las condiciones expuestas en los teoremas I y II; criterio que resulta también necesario :

I$''$. *Condición necesaria y suficiente para que un factor de convergencia (es decir que cumple las condiciones I$'$ y II) conserve los límites nulos de las funciones acotadas es que la integral indefinida de su módulo sea uniformemente continua respecto de r en el punto t_0.*

Como es sabido, toda integral indefinida es función continua de r; la única condición que le imponemos es por tanto la *uniformidad* en el punto t_0, a la cual se le pueden dar formas muy variadas, y de este teorema fundamental se deducen los otros, como ya se expuso en nuestro libro.

El señor Raff parte en su última memoria ya citada de otro criterio que en esencia coincide con el dado por Lebesgue para la convergencia de la sumatriz de toda función integrable y acotada; pero

[1] *Jahrbuch,* volumen 59_{II}, página 968.

[2] Asociación española para el progreso de las Ciencias, 1934.

estudia en especial los modificaciones que deben introducirse para las integrales de Riemann y llega a este resultado [1]:

Las condiciones necesarias y suficientes a fin de que para cada función $f(r)$ de la clase C exista la correspondiente $S(t)$ en un entorno de t_0 y sea $\lim S(t) = 0$, son las siguientes :

(1) Que $\lambda(r, t)$ sea absolutamente integrable en un entorno de t_0 y exista un número $M > 0$, tal que para cada t de un entorno de t_0 permanezca

$$\int_M |\lambda(r, t)| \, dr \leq M;$$

(2a′) Que para cada intervalo i tal que sea positiva su distancia al punto singular r_0, exista

$$\lim_{t \to t_0} \int_{iM} \lambda(r, t) \, dr = 0;$$

(3′) Que para cada sucesión de conjuntos $\mathbf{N}_\varkappa$ parciales de $\mathbf{M}$ tales :
1° que r_0 esté a distancia positiva de un cierto $\mathbf{N}_\varkappa$;
2° que $\mathbf{N}_{\varkappa+1}$ sea conjunto parcial de $\mathbf{N}_\varkappa$;
3° que para cada i sea

$$\lim_{\varkappa \to \infty} |i\mathbf{M}_\varkappa| = 0,$$

se verifique :

$$\lim_{\substack{\varkappa \to \infty \\ t \to t_0}} \int_{\mathbf{N}_\varkappa} |\lambda(r, t)| \, dr = 0.$$

La generalidad de este teorema es más aparente que real [2], y su contenido se reduce en substancia a ésto : las condiciones necesarias y suficientes son :

(1) Claramente se ve que es nuestra condición II;

(2a′) Aclarado (véase nota [1] al pie) el barroquismo de la expresión, es evidentemente idéntica a nuestra condición I′;

(1) Adoptamos nuestra notación para las variables, a fin de facilitar la comparación.

(2) En efecto, las demostraciones de Lebesgue que este genial creador se complace en dar bajo la apariencia más modesta y con el máximo alcance, se aplican, sin esfuerzo ni gloria (bien lo sabía Lebesgue sin decirlo), a integrales definidas en conjuntos medibles cualesquiera ; y considerar integrales de Riemann sobre conjuntos cualesquiera medibles es sacar las ideas de quicio. Puesto a generalizar, pudo hacerlo a los espacios abstractos, siquiera a los métricos, ya que no a los topológicos, como hemos hecho en los teoremas que inician esta nota ; y así habría podido notar el autor cuán impropia resulta su expresión, que aplicada al caso de los intervalos dice « que el punto ∞ tenga distancia *positiva* del intervalo i » para expresar la simplicísima condición de que éste sea *finito*.

(3′) Sin más que aplicar nuestro teorema 2 ó 4, o bien directamente, resulta inmediatamente que equivale a nuestra condición I″.

El criterio del señor Raff coincide, por consiguiente, con uno de los nuestros.

Conviene puntualizar además, para delimitar claramente la frontera entre las condiciones necesarias y las suficientes, que las condiciones I′ y II, dadas como *necesarias* en nuestro teorema II relativo a los algoritmos de convergencia, son también *suficientes* si el factor $\lambda(r, t)$ está acotado desde un valor de t en adelante, como acontece en todos los algoritmos que por ofrecer interés han merecido estudio especial.

Diciembre 1936.

Nota. — A punto de tirarse este pliego llega una carta del doctor Raff en que da amables explicaciones, proclama la exactitud de nuestros teoremas y reconoce las inspiraciones que debe a nuestro trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

Karl Menninger, *Kulturgeschichte der Zahlen.* Verlag Ferdinand Hirt. Breslau, 1934.

Uno de los capítulos más interesantes de la historia de la cultura es sin duda la historia del número, de los pronombres numerales y de los sistemas de la numeración. No había hasta ahora un libro que abordara específicamente este tema, iluminando sus múltiples facetas, y esclareciendo el estrecho nexo que liga el número con las demás expresiones histórico-culturales de un pueblo, y, en especial, con el mito y con el lenguaje. La obra de Karl Menninger llena cumplidomente este vacío. El autor revela conocer a fondo las fuentes históricas, monedas, inscripciones, documentos, etc., que valora e interpreta de acuerdo con los modernos métodos de investigación histórica. Se requieren para ello conocimientos de muy variadas disciplinas : gramática comparada, etimología, semántica, diplomática, y, en general, todo lo atañedero a la historia de la cultura.

El libro contiene una cantidad notable (170) de interesantes ilustraciones, y un detallado índice acrecienta aun más su utilidad. — *A. G. D.*

Adolf Schmidt, *Tafeln der Normierten Kugelfunktionen.* Engelhard-Reyher Verlag, Gotha, 1935.

Una parte considerable de la Física está sintetizada en la ecuación de Laplace; de ahí la importancia de las diferentes clases de funciones esféricas (polimonios de Legendre, funciones esféricas asociadas, funciones teserales de Maxwell, etc.), todas las cuales son soluciones de esa ecuación. Y el interés que esas funciones presentan ha ido en aumento en los últimos años, con la rápida constitución de la geofísica en disciplina teórica. En efecto, en esa ciencia es fundamental el problema de la representación de una magnitud (función) definida en los puntos de la esfera; y, para ello, el procedimiento adecuado es precisamente el desarrollo en serie de funciones esféricas.

Ya existían ciertamente algunas tablas de funciones esféricas particulares; pero ellas han aparecido en publicaciones académicas de difícil acceso (con excepción de la tabla de polinomios de Legendre contenida en la conocida obra de Jahnke-Emde); y, en general, sus autores no han consultado las necesidades del matemático aplicado (geodesta, geofísico, etc.), que usa las funciones esféricas sólo como un medio, y para el cual es esencial llegar al número. Precisamente esa constante preocupación por las necesidades del matemático práctico es lo que da fisonomía propia a las presentes tablas, que permiten resolver los dos problemas siguientes: 1º dados los valores de una función en ciertos puntos situados en paralelos de la esfera, calcular los coeficientes del desarrollo de esa función en series de funciones esféricas; 2º evaluar numéricamente la suma de un cierto número de términos de una serie de funciones esféricas, cuyos coeficientes se conocen. A este objeto sirve una tabla de funciones esféricas asociadas *normadas*.

Como el autor hace notar, las funciones *normadas* presentan grandes ventajas sobre las usuales (en las que no figura el factor de normalización) para los cálculos numéricos. Figuran también los logaritmos de las funciones asociadas, y asimismo existe una tabla de las derivadas de esas funciones.

Una colección de fórmulas (teoremas de adición, representación por medio de integrales, etc.), acrecienta la utilidad de la obra. — *A. G. D.*

ARTURO HAAS, *Athomtheorie,* Walter de Gruyter, Leipzig, 1936. Un volumen de 292 páginas, RM. 8,50.

Si grande fué la reforma de este acreditado libro, al aparecer en segunda edición, no es menos considerable la transformación sufrida para reaparecer en esta su tercera impresión, enriquecida con los trabajos recientes sobre el núcleo, sobre la radiación corpuscular, la espectroscopia y la estructura del átomo y las modernas aplicaciones de la mecánica ondulatoria.

Subsiste, sin embargo, el juicio emitido por Sommerfeld en 1910: no cabe una exposición elemental mejor de la física atómica, ni más cuidadosamente escrita. Y también puede repetirse otro juicio autorizado: si existe alguien capaz de dar a los temas difíciles la apariencia de sencillez, sin llegar a la incorrección, es el autor de este libro.

He aquí el contenido: I. Electrones, átomos y cuantos de luz; II. Fundamentos de la mecánica cuántica; III. Los espectros del átomo; IV. Los rayos Röntgen; V. Los núcleos atómicos; VI. Las moléculas; VII. Las acciones mutuas entre luz y materia.

En un apéndice se compendian: un resumen de los diversos capítulos, de acuerdo con la laudable costumbre del autor, seguida en otros libros; tabla de abreviaturas y tecnicismos; las constantes universales de la física atómica; bibliografía; índice alfabético de materias.

La exposición está hecha hábilmente, eludiendo los conocimientos de matemática superior que de otro modo serían necesarios, y hace el libro accesible a los físicos experimentales y aun a todas las personas cultas, que carecen de tal preparación especial. — *R. P.*

J. B. POMEY, *Calcul de probabilités*, Gauthier-Villars, Paris 1935. Un volumen de 90 páginas. Fr. 25.

Modernamente se suceden sin interrupción importantes estudios para fundamentar sólidamente el cálculo de probabilidades; pero al lado de esta corriente, y sin preocuparse de ella, prosiguen los técnicos haciendo aplicaciones, cada día más interesantes, de esta disciplina, a las más variadas ciencias y técnicas. El folleto del conocido autor de excelentes tratados de física, entra de lleno en esta segunda tendencia, adoptando los conceptos clásicos, encadenando con ellos los teoremas básicos de Bayes, Poisson, etc. más algunos teoremas modernos como el de Ocagne, y haciendo inmediatamente aplicaciones a la telefonía y teoría cinética de gases.

El libro lleva este membrete : *Conferencia en la escuela superior de electricidad;* pero claro es que si tal fué su origen, ésta ha sido ampliada hasta constituir un compendio muy útil como introducción de esta ciencia. — *R. P.*

J. PELSENEER, *Esquisse du progrés de la Pensée mathématique, des primitifs au IX^{e} Congrés international des Mathématiciens*. Hermann, Paris, 1935. Un volumen en 8° de 160 páginas. Fr. 15.

Para el lector profano en matemáticas y no suficientemente culto, son peligrosos tales títulos llamativos, frecuentes en libros de vulgarización. Quien sólo posea como pertrechos matemáticos los vagos recuerdos de las fatigas sufridas en el bachillerato con el insoportable Euclides, puede quizás hacerse la ilusión de haber recorrido los cuarenta siglos de progreso de esta ciencia, tras de una lectura superficial (pues más profunda no le sería posible) de estas breves páginas; muchas menos de las que necesita cualquier novelista para relatar las peripecias de unos vulgares amores contrariados. El lector inteligente se dará cuenta, sin embargo, del verdadero significado del título; no se trata de una historia de la matemática, ni de un libro de metodología de esta ciencia; pero está más cerca de esto que de aquello. Es en verdad, una amena y sugestiva introducción, casi diríamos un aperitivo, para poder deglutir la indigesta mole del Brunschvicg. Más parecido tiene con el precioso volumen de Boutroux, pero abarca más extenso período, comenzando su exposición por la rudimentaria ciencia de los pueblos primitivos.

Ante la imposibilidad de penetrar en el hondo significado de las diversas teorías, que forman cadena demasiado pesada para los profanos, se esfuerzan estas útiles exposiciones en mostrar la fisonomía de la matemática en cada era, entroncándola en el paisaje cultural de su tiempo, que refleja su cambiante color sobre todas las creaciones humanas. — *R. P.*

E. TORNIER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrationstheorie*. B. G. Teubner, 1936. Un volumen de 4° de 160 páginas. Enc. RM. 12.

Entra de lleno esta obra en la primera de las dos tendencias antes señaladas en estas mismas páginas. Quien desee utilizar el cálculo de probabilidades como instrumento para efectuar aplicaciones a otras disciplinas y se encuentre con que la mayor parte del libro (100 págs.) está dedicada enteramente a la teoría de los sistemas de conjuntos abstractos, de la medida de conjuntos, y de la integración en los espacios abstractos, antes de aparecer la palabra probabilidad, se sentirá un tanto sorprendido, al comparar éstas con otras exposiciones en que se comienza por la definición (o seudodefinición) de esta palabra. Y sin embargo, para quien no se sienta satisfecho con vagas intuiciones que se desmoronan apenas se someten a un somero análisis, y sienta repugnancia por los bellos juegos de palabras armoniosas combinadas en perfecto círculo vicioso, no hay en verdad otro camino.

El concepto de probabilidad es *aditivo* y vana será toda teoría que no se preocupe de analizar a fondo el concepto y propiedades de las funciones aditivas de conjunto. Algunas teorías rigurosas de la probabilidad tuvieron éxito efímero ; tal la de von Mises fundada en el concepto de *colectivo*, el cual, por desgracia, ha dado origen a antinomias que obligan a abandonarlo No más sólida es la edificación puramente formal basada en la analogía de las propiedades de la probabilidad con la medida besguiana, que condujo a identificarlas sin más detenido análisis. Es, por tanto, problema no resuelto la construcción científica del cálculo de probabilidades y en este sentido representa el libro del nuevo profesor de Gottinga una estimable contribución.

Después de la exposición muy completa de las propiedades de los cuerpos y anillos aborda de modo original la teoría de la medida, la cual descansa sobre cuatro postulados : existencia de la medida ; descomposición ; continuidad ; monotonía.

Desarrolla después la teoría de las funciones medibles y de la integral, con más amplia generalidad de la que sería indispensable para abordar el problema de las probabilidades. Ocupa esta parte propedéutica los dos tercios de la obra, y aborda en la segunda parte la teoría de la probabilidad, cuyo desarrollo es ya fácil una vez preparados todos los recursos matemáticos.

Los axiomas de la probabilidad abstracta inspirados en sus propiedades intuitivas corresponden exactamente a lo establecido en la primera parte del libro y llega así a los teoremas de adición y multiplicación (probabilidades totales y compuestas) y al clásico teorema de Bayes. Finalmente, mediante el estudio de las funciones escalonadas asociadas, demuestra los teoremas asintóticos de Bernoulli y de Poisson.

Representa, en suma, la obra analizada, importante contribución al cálculo teórico de probabilidades. — *R. P.*

Para ingresar como miembro de la Unión Matemática Argentina, a partir de 1937, será necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de $ 5 m/n mensuales.

La cuota de suscripción a la REVISTA DE LA U. M. A., a partir de 1937, será de $ 10 m/n anuales, cuyo envío deberá efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera señorita Raquel Simonetti, Perú 222, Buenos Aires.

Los señores suscritores, domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de $ 1.00 m/n cada una, que serán cobradas a domicilio.

Los trabajos originales enviados para su publicación en la REVISTA DE LA U. M. A., serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen escrito acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'étranger : 4.00 dollars americains.

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous :

Señor Secretario de la UNION MATEMATICA ARGENTINA

PERU 222, Buenos Aires (Rep. Argentina)

SUMARIO

COMUNICACIONES

BIBLIOGRAFIA