Volumen X Número 1

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(Miembro del patronato de la Mathematical Reviews)

REDACTADA por

J. Babini, (Director), M. Balanzat, J. Barral Soutó, E. Corominas, Y. Frenkel, F. L. Gaspar, A. González Domínguez, P. Pi Calleja, J. Rey Pastor, L. A. Santaló, F. Toranzos y A. Valeiras

□

MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. Babini (SantaFe) (fundador). — M. Balanzat (San Luis). — J. Barral Souto (B. Aires) (fundador) — C. A. Bula (Rosario) (fundador). — E. Corominas (Mendoza). — E. Chichizola (Rosario). — C. Dieulefait (Rosario) (fundador). — Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (B. Aires) (fundador). — Facultad de Ciencias Matemáticas (Rosario) (fundador). - Facultad de Química Industrial (Santa Fe) (fundador). — Y. Frenkel (B. Aires). — E. Gaspar (Rosario) (fundador). — F. L. Gaspar (Rosario) (fundador). — J. Giannone (Rosario) (fundador). — A. González Domínguez (Buenos Aires) (fundador). — J. González Gale (Buenos Aires) (fundador). — M. Guitarte (Buenos Aires) (fundador). — W. S. Hill (Montevideo) (fundador). — C. Isella (Rosario) (fundador). — H. Magliano (La Plata). — Observatorio Astronómico (La Plata). — J. Olguin (Rosario) (fundador). — P. Pí Calleja (San Juan). — E. R. Raimondi (Buenos Aires) (fundador). — J. E. Reynal (Buenos Aires). — J. Rey Pastor (Buenos Aires) (fundador). — E. L. Samatán (Buenos Aires) (fundador). — L. A. Santaló (Rosario) (fundador). — J. Sortheix (Tucumán) (fundador). — D. T. A. de Speluzzi (Buenos Aires) (fundador). — E. Terradas (La Plata) (fundador). — F. Toranzos (La Plata).

□

BUENOS AIRES
1944

SUMARIO

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPAÑÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G. BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUITARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — CARLOS ISELLA (Rosario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).

UNA CUESTION DE MAXIMO

por Sergio Sispánov

En el vol. IX (pág. 75) fué publicado el tema:

Un fabricante de envases nos ha propuesto el tema siguiente: cortar una chapa rectangular en dos rectángulos, uno para sacar de él el fondo del envase y el otro para la superficie lateral del cilindro, de forma tal que la capacidad del mismo sea máxima.

Resolución. — Enunciemos el pedido del fabricante en la forma más clara y precisa: un rectángulo ,cuyos lados son a y Θa $(0 < \Theta \leqq 1)$, se corta paralelamente a uno de ellos. La parte rectangular ACB (fig. 1) se emplea para hacer la superficie

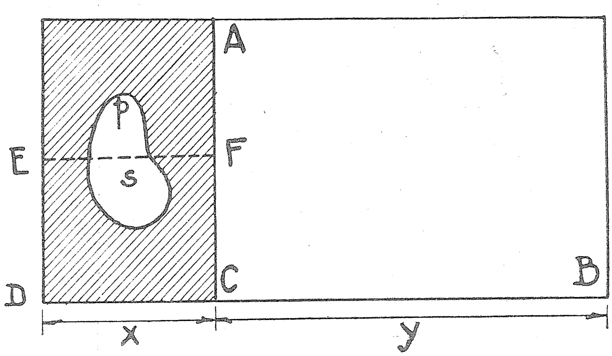

Fig. 1

lateral de un cilindro. De la otra parte ACD se corta la base s para el mismo cilindro, de perímetro p. Encontrar la forma de la base s y los segmentos x e y de tal manera que el volumen del cilindro sea máximo. ¿Cuál será el valor más ventajoso de la razón Θ de los lados, si se da únicamente el área $\Theta a^2 = c^2$ del rectángulo que se corta, sin indicar la longitud de sus lados?

Pueden hacerse dos hipótesis. Si CA se toma por directriz del cilindro y CB por la generatriz del mismo, el valor más grande del perímetro, será $p = CA$. Por el contrario, el perímetro más largo será $p = CB$, cuando CB sirve por directriz y CA desempeña el papel de la generatriz.

Por el problema sobre los *isoperímetros* se sabe que, para el valor dado del perímetro p, la figura comprendida entre 2 paralelas y que posee el área máxima se compone de un rectángulo y dos semicírculos iguales (fig. 3). En el caso de 2 pares de paralelas, perpendiculares entre sí, la mayor área corresponde a la figura que está compuesta de una cruz rectangular y cuatro cuadrantes iguales (fig. 4).

Hipótesis I. Cortamos el rectángulo dado paralelamente a su lado mayor (fig. 2). En tal ocasión la altura del cilindro es y y $p = a$.

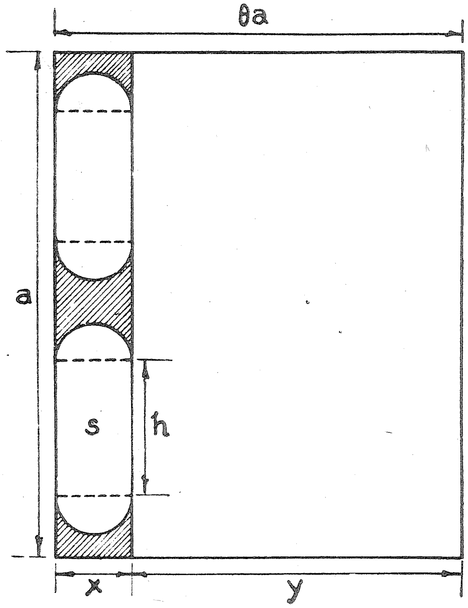

Fig. 2

Sin dificultad encontramos

$$y = a\left(\Theta - \frac{x}{a}\right) \quad , \quad h = \frac{a}{2}\left(1 - \pi\frac{x}{a}\right),$$

$$s=\frac{\pi}{4}a^2\cdot\frac{x}{a}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{x}{a}\right).$$

Para el volumen del cilindro se tendrá

$$v=\frac{\pi}{4}a^3\cdot\frac{x}{a}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{x}{a}\right)\left(\Theta-\frac{x}{a}\right).$$

Igualando a cero la primera derivada v' y teniendo en cuenta el signo de la segunda, vemos que la menor raíz dè la ecuación

$$3\left(\frac{x}{a}\right)^2-2\left(\frac{2}{\pi}+\Theta\right)\cdot\frac{x}{a}+\frac{2}{\pi}\Theta=0$$

conduce al valor máximo v_0 del volumen. De manera que

$$\frac{x_0}{a}=\frac{1}{3}\left(\Theta+\frac{2}{\pi}-\sqrt{\Delta}\right)\quad,\quad\frac{y_0}{a}=\frac{1}{3}\left(2\Theta-\frac{2}{\pi}+\sqrt{\Delta}\right),$$

$$\frac{h_0}{a}=\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{\pi}-\Theta+\sqrt{\Delta}\right)\tag{1}$$

y

$$v_0=\frac{\pi}{18}\left[\frac{\Theta}{\pi}\left(\Theta+\frac{2}{\pi}\right)-\Delta\,\frac{x_0}{a}\right]\cdot a^3=\frac{\Theta}{18}\left(\Theta+\frac{2}{\pi}-\frac{2\Delta}{\Theta+\frac{2}{\pi}+\sqrt{\Delta}}\right)\cdot a^3,\tag{2}$$

siendo

$$\Delta=\Theta^2-\frac{2}{\pi}\Theta+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2.$$

Para $\Theta=1$ las fórmulas obtenidas dan los siguientes valores numéricos aproximados

$$\frac{x_0}{a}=0{,}2533\ldots,\ \frac{y_0}{a}=0{,}7467\ldots,\ \frac{y_0}{x_0}=2{,}9479\ldots,$$

$$\frac{h_0}{a}=0{,}1021\ldots,\quad v_0=0{,}05694\,.\,a^3.$$

Se puede comprobar que para $0<\Theta\leqq 1$ se verifican las desigualdades

$$1<\frac{y_0}{x_0}\leqq 2{,}9479\ldots, \qquad x_0+h_0<\frac{a}{2}.$$

La última de ellas nos indica que del rectángulo dado pueden cortarse no solamente la superficie lateral y el fondo del cilindro, sino también la tapa, como lo está señalado en la fig. 2.

Calculamos por las fórmulas (1) y (2) valores numéricos correspondientes a $\Theta=0{,}6778\ldots$

$$\frac{x_0}{a}=0{,}2177\ldots,\ \frac{y_0}{a}=0{,}4591\ldots,\ \frac{y_0}{x_0}=2{,}1082\ldots,$$
$$\frac{h_0}{a}=0{,}1564\ldots; \quad v_0=0{,}03296\,.\,a^3.$$

De este caso especial se tratará más detenidamente en adelante.

En conclusión, hagamos constar que, si el rectángulo dado se corta paralelamente al lado menor, rigen las relaciones que se deducen de las anteriores permutando a con Θa. El valor máximo para el volumen, obtenido en esta ocasión, es menor que el valor máximo v_0 determinado por la fórmula (2).

Hipótesis II. Cortamos el rectángulo paralelamente a su lado menor Θa, tomándolo por altura del cilindro y haciendo $p=y$ perímetro de la base (fig. 3).

Caso 1º. $\dfrac{3}{2(\pi+2)}=0{,}2917\ldots\leqq\Theta\leqq 1.$

Se establecen fácilmente las siguientes relaciones:

$$y=a\left(1-\frac{x}{a}\right), \quad h=\frac{a}{2}\left[1-(\pi+1)\frac{x}{a}\right], \quad s=\frac{a^2}{2}.\frac{x}{a}\left(1-\frac{\pi+2}{2}.\frac{x}{a}\right)$$

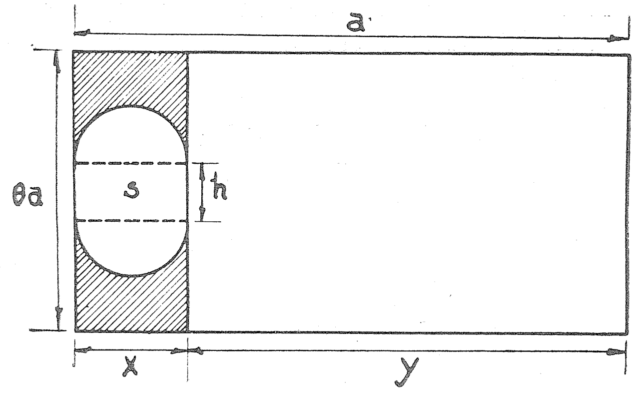

Fig. 3

Como la altura Θa es connstante, el problema se reduce a la determinación del máximo s_0 del área s, lo que nos da

$$\frac{x_0}{a}=\frac{1}{\pi+2}=0{,}1945\ldots,\ \frac{y_0}{a}=\frac{\pi+1}{\pi+2}=0{,}8055\ldots,$$

$$\frac{y_0}{x_0}=\pi+1=4{,}1416\ldots, \qquad (3)$$

$$\frac{h_0}{a}=\frac{1}{2(\pi+2)}=0{,}09725\ldots;\quad s_0=\frac{a^2}{4(\pi+2)}=0{,}04862\,.\,a^3,$$

$$v_0=\frac{\Theta a^3}{4(\pi+2)}=0{,}04862\,.\,\Theta a^3. \qquad (4)$$

Comparando el valor máximo anteriormente hallado por la fórmula (2) con el recientemente obtenido por la fórmula (4) llegamos a la ecuación

$$\Theta+\frac{2}{\pi}-\frac{2\Delta}{\Theta+\frac{2}{\pi}+\sqrt{\Delta}}=\frac{9}{2(\pi+2)}=0{,}8752\ldots$$

cuya raíz es $\Theta=0{,}6778\ldots$ y cuyo primer miembro es función creciente de Θ. Por consiguiente, es más ventajoso cortar en la forma correspondiente a la hipótesis I, si

$$0{,}6778\ldots\leqq\Theta\leqq 1.$$

Es evidente que en el caso considerado se podría cortar, como antes, el fondo y la tapa, cuando se cumple con la condición

$$x_0+h_0=\frac{3a}{2(\pi+2)}\leqq\frac{1}{2}\Theta a,$$

de donde

$$\Theta\geqq\frac{3}{\pi+2}.$$

Para el caso de ser

$$\Theta=\frac{3}{\pi+2}=0{,}5835\ldots$$

la fórmula (4) nos da

$$v_0=\frac{3a^3}{4(\pi+2)^2}=0{,}02837\,.\,a^3. \tag{5}$$

En el caso límite

$$\Theta=\frac{3}{2(\pi+2)}=0{,}2917\ldots$$

la misma fórmula suministra el valor

$$v_0=\frac{3a^3}{8(\pi+2)^2}=0{,}01419\,.\,a^3. \tag{6}$$

Hipótesis II. Caso 2º. $0<\Theta\leqq\dfrac{3}{2(\pi+2)}=0{,}2917\ldots$

Tomando el radio r (fig. 4) por variable independiente formamos las igualdades

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{3}\left[(1-2\Theta)+2(4-\pi)\,.\dfrac{r}{a}\right], \\ y = \dfrac{2a}{3}\left[(1+\Theta)-(4-\pi)\,.\,\dfrac{r}{a}\right], \end{cases} \qquad \begin{cases} h = a\left(\Theta - 2\,.\dfrac{r}{a}\right), \\ k = \dfrac{3}{a}\left[(1-2\Theta)-2(\pi-1)\,.\dfrac{r}{a}\right] \end{cases}$$

y

$$s = a^2\left[\frac{1}{3}\,\Theta\,(1-2\Theta)+\frac{2}{3}\Theta\,(4-\pi)\,.\,\frac{r}{a}-(4-\pi)\,.\,\frac{r^2}{a^2}\right], \qquad v = \Theta a s.$$

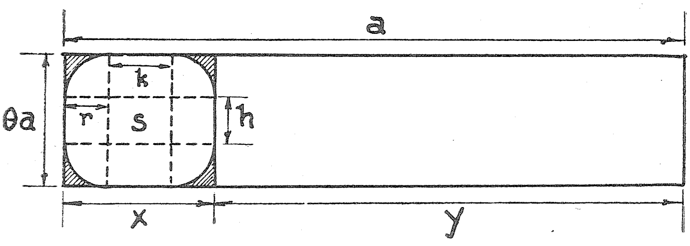

Fig. 4

Igualando a cero la derivada s' encontramos sucesivamente

$$r_0 = \frac{1}{3}\,.\,\Theta a, \quad h_0 = \frac{1}{3}\,.\,\Theta a, \quad k_0 = \frac{1}{3}\,[1-\frac{2}{3}\,(\pi+2)\,\Theta]\,.\,a; \tag{7}$$

$$\frac{x_0}{a} = \frac{1}{3}\,[1-\frac{2}{3}\,(\pi-1)\,\Theta], \frac{y_0}{a} = \frac{2}{3}[1+\frac{1}{3}(\pi-1)\,\Theta], \quad 2 < \frac{y_0}{x_0} \leqq \pi+1;$$

$$s_0 = \frac{\Theta}{3}\,[1-\frac{1}{3}\,(\pi+2)\,\Theta]\,.\,a^2, \quad v_0 = \frac{\Theta^2}{3}[1-\frac{1}{3}\,(\pi+2)\,\Theta]\,.\,a^3. \tag{8}$$

Las relaciones (8) suministran valores máximos para s y v en las condiciones consideradas.

En el caso particular

$$\Theta = \frac{1}{\pi+2} = 0{,}1945\ldots,$$

que necesitaremos en adelante, por las fórmulas (7) y (8) calculamos

$$\frac{r_0}{a} = \frac{1}{3(\pi+2)} = 0{,}06483\ldots, \quad \frac{h_0}{a} = \frac{1}{3(\pi+2)} = 0{,}06483\ldots, \quad \frac{k_0}{a} = \frac{1}{9};$$

$$\frac{x_0}{a} = \frac{\pi+8}{9(\pi+2)} = 0{,}2408\ldots, \quad \frac{y_0}{a} = \frac{2(4\pi+5)}{9(\pi+2)} = 0{,}7592\ldots, \qquad (9)$$

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{2(4\pi+5)}{\pi+8} = 3{,}1533\ldots;$$

$$s_0 = \frac{2a^2}{9(\pi+2)} = 0{,}04322 \,.\, a^2, \quad v_0 = \frac{2a^3}{9(\pi+2)^2} = 0{,}008406 \,.\, a^3. \qquad (10)$$

Para el caso límite

$$\Theta = \frac{3}{2(\pi+2)}$$

las mismas fórmulas conducen a los resultados (3) y (6).

El método de cortar indicado en la figura 3 no es aplicable en el 2o. caso de la hipótesis II en vista de que la suma $x_0 + h_0$ resultaría mayor que Θa. Tampoco puede realizarse el corte de la figura 4, si cabe el 1er. caso de la hipótesis II, ya que k_0 sería negativa.

La comparación de los valores máximos v_0 calculados en el caso 2o de la hipótesis II por las relaciones (2) y (8) nos indica que esta hipótesis es más ventajosa que la I.

Resumiendo los resultados obtenidos podemos formar el siguiente esquema:

Caso A: $0 < \Theta \leqq 0{,}2917\ldots$ Fórmulas (7) y (8). Fig. 4.

Caso B: $0{,}2917\ldots \leqq \Theta \leqq 0{,}6778\ldots$ Fórm. (3) y (4). Fig. 3

Caso C: $0{,}6778\ldots \leqq \Theta \leqq 1.$ Fórmulas (1) y (2). Fig. 2.

Estudiemos ahora la dependencia funcional del volumen máximo v_0 de la razón Θ del lado menor al mayor con el objeto de hallar el valor más ventajoso de Θ, suponiendo que es constante el área $\Theta a^2 = c^2$ del rectángulo que se corta.

Haciendo

$$a=\frac{c}{\sqrt{\Theta}} \tag{11}$$

en las expresiones (8), (4), (2), encontramos, respectivamente:

Caso A. $v_0=\frac{c^3}{3}\cdot\sqrt{\Theta}\left[1-\frac{1}{3}(\pi+2)\Theta\right].$

Caso B. $v_0=\frac{c^3}{4(\pi+2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Theta}}\cdot$

Caso C. $v_0=\frac{c^3}{18}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Theta}}\left(\Theta+\frac{\pi}{2}-\frac{2\Delta}{\Theta+\frac{2}{\pi}+\sqrt{\Delta}}\right)\cdot$

De conformidad con estas igualdades se forma sin dificultad la siguiente tabla para la función v_0, correspondiente a la variación del argumento Θ de 0 a 1:

$\Theta=0,$	$v_0=0$
$0<\Theta<\frac{1}{\pi+2},$	v_0 crece
$\underline{\Theta_1}=\frac{1}{\pi+2}=0{,}1945\ldots,$	$v_0=\textit{máx}=\frac{2c^3}{9\sqrt{\pi+2}}=0{,}09800\,.\,c^3$
$\frac{1}{\pi+2}<\Theta<\frac{3}{2(\pi+2)},$	v_0 decrece
$\Theta=\frac{3}{2(\pi+2)}=0{,}2917\ldots,$	$v_0=\frac{c^3}{2\sqrt{6(\pi+2)}}=0{,}09002\,.\,c^3$
$\frac{3}{2(\pi+2)}<\Theta<\frac{3}{\pi+2},$	v_0 decrece
$\Theta=\frac{3}{\pi+2}=0{,}5835\ldots,$	$v_0=\frac{c^3}{4\sqrt{3(\pi+2)}}=0{,}06366\,.\,c^3$
$\frac{3}{\pi+2}<\Theta<0{,}6778\ldots,$	v_0 decrece
$\Theta=0{,}6778\ldots,$	$v_0=0{,}05906\,.\,c^3$

$0{,}6778\ldots < \Theta < 1, \qquad v_0$ decrece

$\Theta = 1, \qquad v_0 = 0{,}05694 \,.\, c^3.$

Vemos que la chapa rectangular del área dada permite obtener *maximum maximorum* del volumen para el recipiente cilíndrico sin tapa, si la razón de sus lados es igual a $\Theta_1 = 0{,}1945\ldots$ Para hallar otros elemenntos se emplean las fórmulas (9) y (10).

Hagamos constar que si se admite *un solo corte* AC (fig. 1), éste debe efectuarse paralelamente al lado menor y el recipiente de mayor volumen toma la forma de un paralelepípedo rectangular de base AD y de altura CA. La razón Θ debe satisfacer a las desigualdades

$$0 < \Theta < \frac{1}{2}.$$

Los demás elementos se determinan por las relaciones

$$\frac{x}{a} = \frac{1-2\Theta}{3}, \quad \frac{y}{a} = \frac{2}{3}(1+\Theta); \quad v_0 = \frac{\Theta^2}{3}(1-2\Theta)\,.\,a^3.$$

Si se da el área c^2 de la chapa, la forma más ventajosa de la misma se caracteriza por las condiciones

$$\Theta_0 = \frac{1}{6}; \quad \frac{x_0}{a} = \frac{2}{9}, \quad \frac{y_0}{a} = \frac{7}{9},$$

y

$$v_0 = \frac{2c^3}{9\sqrt{6}} = 0{,}09072\,.\,c^3.$$

Finalmente consideremos el recipiente con tapa y fondo, suponiendo que la chapa se corta como está indicado en la fig. 5.

Un procedimiento análogo al empleado en el caso 2º. de la hipótesis II conduce a las fórmulas que se deducen de las anteriormente obtenidas para este caso, cambiando en ellas Θ en $\frac{\Theta}{2}$. La razón Θ debe hallarse en el intervalo

$$0 < \Theta \leq \frac{3}{\pi+2}.$$

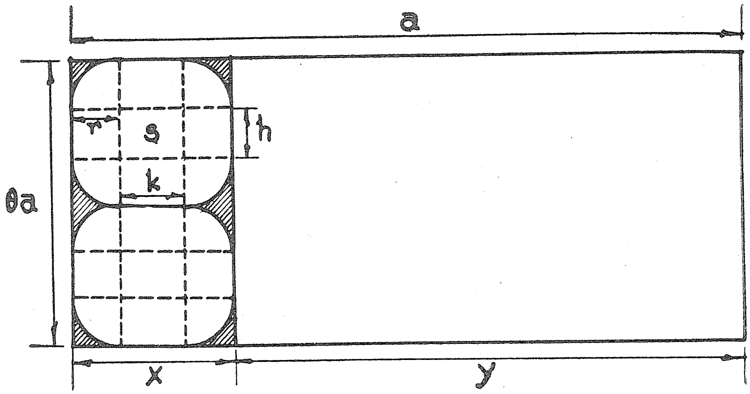

Fig. 5

Las expresiones para r_0, h_0, k_0, x_0, y_0, s_0 correspondientes al máximo del volumen se encuentran por las fórmulas (7) y (8) poniendo $\frac{\Theta}{2}$ en vez de Θ. La expresión para el volumen máximo se convierte en

$$v_0 = \frac{\Theta^2}{6}[1 - \frac{1}{6}(\pi + 2)\Theta] \, . \, a^3. \tag{12}$$

De esta manera se obtienen para v_0 valores mayores que los calculados por la fórmula (2) y correspondientes a los mismos valores de Θ.

Para determinar la forma más ventajosa de la chapa rectangular se sustituye a en la fórmula (12) por su expresión (11), lo que nos da

$$v_0 = \frac{c^3}{6}\sqrt{\Theta}[1 - \frac{1}{6}(\pi + 2)\Theta].$$

Igualando a cero la derivada de v_0 con respecto Θ vamos a tener

$$\Theta_2 = \frac{2}{\pi + 2} = 0{,}3890\ldots$$

Las desigualdades (9) y (10) sirven para encontrar las cantidades r_0, h_0, k_0, x_0, y_0, s_0 en tal ocasión. Para el *maximum maximorum* del volumen resulta

$$v_0 = \frac{4a^3}{9(\pi+2)^2} = 0{,}01681 \,.\, a^3$$

o bien

$$v_0 = \frac{c^3}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi+2}} = 0{,}06930 \,.\, c^3.$$

Si se admiten *únicamente* cortes rectilíneos AC y EF (fig. 1), el paralelepípedo, con tapa y fondo, tendrá el mayor volumen

$$v_0 = \frac{1}{6}\Theta^2(1-\Theta) \,.\, a^3,$$

cuando

$$\frac{x}{a} = \frac{1-\Theta}{3}, \quad \frac{y}{a} = \frac{2+\Theta}{3},$$

siendo

$$0 < \Theta < 1.$$

La chapa rectangular del área dada c^2 y de forma más ventajosa satisface a las condiciones

$$\Theta_0 = \frac{1}{3}; \quad \frac{x_0}{a} = \frac{2}{9}, \quad \frac{y_0}{a} = \frac{7}{9}$$

y

$$v_0 = \frac{c^3}{9\sqrt{3}} = 0{,}06415 \,.\, c^3.$$

Asunción, Paraguay.
22 de febrero le 1944.

EL SPIN TOTAL DE UN SISTEMA DE MAS DE 2 PARTICULAS

por Mario Bunge

El hecho experimental de la existencia del momento cuadrupolar del estado fundamental del deuterón [1] indica la acción de fuerzas, entre dos nucleones, del tipo [2]

$$R_{ik} = \frac{1}{2}\,(1 - {}^{i}\beta\,{}^{k}\beta)\;({}^{i}\vec{\alpha}\,\vec{r}_{ik})\;\;({}^{k}\vec{\alpha}\;\vec{r}_{k}) \tag{1}$$

$$S_{ik} = ({}^{i}\vec{\sigma}\,\vec{r}_{ik})\;\;({}^{k}\vec{\sigma}\,\vec{r}_{ik}). \tag{2}$$

Ambas fuerzas implican una interacción entre spin y órbita, y dejan constante — además de la clase total $-({}^{i}\beta + {}^{k}\beta)$ y el momento angular total — el cuadrado de la suma de los dos spins, o sea, el valor absoluto del spin total:

$$({}^{i}\vec{\sigma} + {}^{k}\vec{\sigma})^{2} R_{\,k} - R_{ik}\,({}^{i}\vec{\sigma} + {}^{k}\vec{\sigma})^{2} = 0 \tag{3}$$

$$({}^{i}\vec{\sigma} + {}^{k}\vec{\sigma})^{2} S_{\,k} - S_{ik}\,({}^{i}\vec{\sigma} + {}^{k}\vec{\sigma})^{2} = 0. \tag{4}$$

El spin total de un sistema de dos nucleones es, pues, una integral de su movimiento.

Es sabido que el estado fundamental del deuterón, debido a las fuerzas del tipo (1) y (2), debe ser una mezcla de estados S_1 y D_1. Las relaciones (3) y (4) excluyen la posibilidad de la configuración ${}^{1}P_{1}$ — que implica un cambio del spin total — en la mezcla del estado fundamental. La configuración ${}^{3}P_{1}$ no interviene por las condiciones de simetría en las coordenadas espaciales.

---

(1) Kellog, Rabi, Ramsay and Zacharias, *Phys. Rev. 55*, 318 (1939).

(2) M. Bunge, *Una nueva representación de los tipos de fuerzas nucleares;* aparecerá próximamente en la "Revista de la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de La Plata".

Por otra parte, la contribución del estado P_1 al estado fundamental del deuterón, implicaría la existencia de un momento eléctrico bipolar. Los citados experimentos de Rabi y sus colaboradores confirman, pues, las relaciones (3) y (4) derivadas de (1) y (2).

Las relaciones (3) y (4) son de importancia para procesos de colisión entre *dos* nucleones. Como el spin total es una constante del movimiento, la colisión entre dos nucleones puede dar lugar a una inversión del spin *total*, pero no a la inversión del spin de una sola partícula. Este resultado concuerda con los cálculos hechos por Rodrígues Martins para un caso particular (3).

En el caso *general*, de un sistema de $n > 2$ nucleones, *no* hay conservación del spin total:

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{}^{i}\vec{\sigma}\right)^{2}.\sum_{i\neq k}^{n}R_{i,k}-\sum_{i\neq k}^{n}R_{i,k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{}^{i}\vec{\sigma}\right)^{2}=-2i\sum_{i,k,l=1}^{n}({}^{i}\vec{\alpha}\,\vec{r}_{ik})\,{}^{l}\vec{\sigma}\,({}^{k}\vec{\alpha}\wedge\vec{r}_{ik})$$

$$=+2i\sum_{i,k,l=1}^{n}({}^{i}\vec{\alpha}\,\vec{r}_{ik})\,\vec{r}_{ik}\,(\vec{\alpha}_{k}\wedge\vec{\alpha}^{l}) \tag{5}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{}^{i}\vec{\sigma}\right)^{2}.\sum_{i\neq k}^{n}S_{i,k}-\sum_{i\neq k}^{n}S_{i,k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{}^{i}\vec{\sigma}\right)^{2}=-2i\sum_{i,k,l=1}^{n}({}^{i}\vec{\sigma}\,\vec{r}_{ik})\,{}^{l}\vec{\sigma}\,({}^{k}\vec{\sigma}\wedge\vec{r}_{ik})$$

$$=+2i\sum_{i,k,l=1}^{n}({}^{i}\vec{\sigma}\,\vec{r}_{ik})\,\vec{r}_{ik}\,({}^{k}\vec{\sigma}\wedge{}^{l}\vec{\sigma}). \tag{6}$$

Por lo tanto, en el caso de colisiones entre más de dos partículas — es decir, en choques en que intervienen núcleos compuestos por más de dos nucleones — puede ocurrir una inversión del spin de una sola partícula.

El autor agradece al Dr. Guido Beck (Observatorio Astronómico de la Nación, Córdoba) la valiosa ayuda que le ha prestado en este trabajo.

9 de mayo de 1944.

Instituto de Física - La Plata.

(3) G. Beck and J. L. Rodríguez Martins, *Phys. Rev., 62,* 554 (1942).

SOBRE EL LEMA DE PINCHERLE

Extracto de una carta dirigida al Prof. J. Rey Pastor

. . . .

He leído con gran detenimiento su interesante nota sobre el «Lema de Pincherle y lema de Borel» aparecida en la Revista de la U. M. A., nº. I, vol. IX, (1943), p. 29 y siguiendo la incitación al lector con que acaba, me permito enviarle unas cuantas acotaciones sobre el tema.

Desde luego quedan ya señaladas por Vd. las incorrecciones contenidas en la «Teoria delle funzioni analitiche» de S. Pincherle (Bologna, 1922); para corregirlas debidamente es necesario entrar en el siempre espinoso problema de la idea matriz que presumiblemente haya inspirado al autor.

El teorema de la pág. 23 de su obra citada expresa: Dado un recinto finito y compleo D, si a cada uno de sus puntos x corresponde un círculo γ, al cual es interior, cada uno de cuyos puntos satisface una cierta propiedad Q_x respecto de x; entonces «existe un número $r > 0$ tal que para cada punto x de D se verifica la propiedad Q_x dentro del círculo de centro x y radio r».

Dado el enunciado correcto de dicho autor, que Vd. cita, contenido en su trabajo «Sopra alcuni sviluppi in serie» (Mem. Accad. Bologna, IV, 3, 1881) y de acuerdo con lo que él mismo indica, yo creo que el enunciado anterior debe completarse diciendo que además se supone que la propiedad Q_x cumple la condición:

(α): *Para todo x_0 del recinto completo D que se considera, el extremo inferior de los radios r_x, correspondientes a los puntos x de un cierto entorno de x_0, es distinto de cero.*

Desde luego r_x es el radio del máximo círculo C_x de centro x, cuyos puntos tienen la propiedad Q_x relativa a x; la comprobación del cumplimiento de la propiedad (α) será más fácil hacerla refiriéndola a un cierto entorno de x_0 que a todo el C_{x_0}.

Entonces el lema así modificado de Pincherle se demuestra bien sea como inmediata aplicación del lema de Borel, el cual es posterior al de Pincherle, o bien por aplicación también casi inmediata del teorema de Weierstrass citado en la objetada demostración de Pincherle, teorema que demuestra la existencia de un punto en cuyo entorno el extremo inferior de r_x es el mismo que en todo el recinto.

En este caso r_x no necesita ser función continua de x y tampoco necesita ser accesible su extremo inferior r en el recinto completo D; pero aun así, por el teorema dicho, existe en D un punto v tal que para todo entorno de v, el extremo inferior de r_x para los puntos de este entorno sigue siendo r; en efecto, esto es inmediato si r es accesible en el punto v de D, y si r es inaccesible, será punto de acumulación de valores r_x para los que sus correspondientes x tendrán en el recinto completo D un punto de acumulacción v. Basta entonces aplicar a v la condición (α) para que el lema de Pincherle quede demostrado. La parte de la demostración de la obra citada de Pincherle en que interviene el círculo C_v es como Vd. indica errónea, pero e ncambio subsiste la consecuencia de la pág. 24 de la obra de Pincherle referente al reticulado, consecuencia que habría de omitirse resrespecto a la proposición que Vd. titula «Lema modificado de Pincherle».

El lema de Pincherle es consecuencia del lema de Borel, pero en cambio, el ejemplo que Vd. da al principio de su nota prueba que en ciertos casos en que es aplicable el lema de Borel, no lo es el de Pincherle.

El olvido en que ha caído el lema de Pincherle lo considero bastante justo, porque la comprobación del cumplimiento de la condición (α) dificulta y en muchos casos impide su aplicación.

La condición (α) se comprueba en la aplicación del lema al teorema de continuidad uniforme sobre un conjunto completo, no tan solo como consecuencia inmediata de la continuidad de r_x en dicho caso, como Vd. ya indica, sino también por el siguiente sencillo razonamiento:

La condición Q_x que han de cumplir los puntos z del entorno C_x de x es la de continuidad

(1) $$|f(z)-f(x)|<\varepsilon.$$

Sea E el entorno circular de x_0 en que se cumple

$$|f(z)-f(x_0)|<\frac{3}{2}, \tag{2}$$

todos cuyos puntos pertenecen a C_{x_0}. Sea E_1 el entorno circular de x_0 con radio mitad del de E.

Todo par de puntos z y x de E cumplen (1); por tanto E_1 pertenece a todos los C_x de los puntos x de E_1 y para éste se cumple la condición (α).

En cambio el lema de Pincherle no es aplicable al teorema de Goursat-Cauchy y por tanto la demostración de la pág. 95 de la obra citada de Pincherle queda también invalidada, no porque deje de subsistir la consecuencia de la pág. 24 citada anteriormente referente al reticulado, sino por no poder comprobar a priori el cumplimiento de la condición (α). En efecto, este cumplimiento equivale a la uniformidad de derivación y ésta no puede deducirse directamente de la existencia de la derivada en cada punto, porque entonces el mismo razonamiento sería válido para el caso de función de una variable real, definida en un conjunto completo y derivable en cada punto; es bien sabido que en este caso la condición necesaria y suficiente para que el cociente incremental tienda uniformemente a su límite es que la derivada sea continua, lo que no siempre ocurre (*).

A este respecto puede observarse que también para el caso de una variable real puede aplicarse el razonamiento clásico del teorema de Goursat en lo referente al reticulado y por tanto de la condición

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon \tag{3}$$

para cualquier z_0 del conjunto completo D, puede deducirse que dado ε puede escogerse un reticulado tal que en cada una de sus mallas exista *un* punto z_0 para el que subsiste (3), siendo z un punnto cualquiera de la malla correspondiente; ello nos dice que son plenamente incorrectas las palabras: «This means, substantially, that de function es *uniformly differentiable* throughout the interior of C» contenidas en la pág. 76 de la 1ª edición de la

(*) Véase v. g. C. J. de la Vallée Poussin, Anlyse infinitésimale. Vol. 1, pág. 69.

reputada obra «The Theory of Functions», de E. C. Titchmarsh, (Oxford, 1932). Precisamente Goursat antes de dar su demostración definitiva, dió otra en que suponía que la función fuese uniformemente derivable, lo que no era gran progreso, ya que entonces era inmediata la continuidad de la derivada por demostración clásica de la teoría de funciones reales y entonces ya podía aplicarse el razonamiento de Riemann.

Es muy natural que el lema de Pincherle se muestre impotente para demostrar el teorema de Goursat-Cauchy, por ser aquel consecuencia del lema de Borel, el que tampoco puede aplicarse en su forma clásica a la demostración de dicho teorema: así vemos que por ejemplo P. Dienes en su obra «The Taylor Series», (Oxford, 1931), a pesar de haber introducido anteriormente el lema de Borel, ha de aplicar (pág. 209) la demostración clásica de Goursat.

Ciertas obras, tal como el «Modern Analysis» de E. T. Whittaker y G. N. Watson (4ª. ed., Cambridge, 1927, pág. 53), traen el que allí llaman lema modificado de Heine-Borel, según enunciado dado por H. F. Baker (Proc. Lond. Math. Soc. (2), I, 1903, pág. 24) y que en esencia no es más que el método de Goursat enunciado en forma general. Este lema modificado de Borel tiene la ventaja de poder aplicarse no tan solo en los casos en que tan útil se muestra el dado por Borel, sino también en el importante teorema de Goursat-Cauchy.

En resumen: el lema dado realmente por Pincherle, el que Vd. propone como lema modificado de Pincherle, el lema de Borel y el llamado lema modificado de Borel (y que aquí sí sería justo llamar de Goursat-Borel) son cuatro proposiciones bien distintas y de las cuales la primera es la menos importante y con menor trascendencia, a pesar de todas las exageradas ponderaciones italianas.

San Juan 23 de Julio de 1943.

Pedro Pi Calleja

CUESTIONES ELEMENTALES RESUELTAS

20. *Demostrar que si a, b, c son positivos y $a > b + c$ es:*

$$\text{I)} \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \, \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{II)} \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx \, \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} b,$$

$$\text{III)} \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \, \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2} bc,$$

IV) *Calcular los valores de estas integrales si es $a < b + c$.*

Solución. I) Por ser $a > b + c$ es $a - b > c$; luego, transformando el producto de senos y cosenos, obtenemos una suma de senos, siendo

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \frac{dx}{x} = \int_0^\infty [\operatorname{sen}(a+b+c)\,x +$$

$$\operatorname{sen}(a+b-c)\,x + \operatorname{sen}(a-b+c)\,x + \operatorname{sen}(a-b-c)\,x]\,\frac{dx}{x}.$$

Calculando la integral del primer sumando obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a+b+c)x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a+b+c)x}{(a+b+c)x}\,d\,(a+b+c)\,x$$

y como cuando $x = 0$, es $(a+b+c)\,x = 0$ y para $x \to \infty$, también $(a+b+c)\,x \to \infty$, en virtud del teorema de Dirichlet que dice que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a+b+c)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Razonando análogamente para los demás sumandos, obtenemos

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \, \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \cdot 4 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

II) Transformando el producto en sumas, obtenemos

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx \, \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \int_0^\infty [\cos (a-b+c)\, x +$$

$$\cos (a-b-c)\, x - \cos (a+b+c)\, x - \cos (a+b-c)\, x] \, \frac{dx}{x^2}$$

y si integramos por partes, designando la suma entre corchetes por Σ_c se obtiene

$$[-\frac{1}{4} \frac{1}{x} \Sigma_c]_0^\infty + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{1}{x} \, d\Sigma_c = [-\frac{1}{x} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx]_0^\infty +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{1}{x} \, d\Sigma_c$$

y como $\lim -\frac{1}{x} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx = 0$ tanto para $x \to 0$ como para $x \to \infty$, el valor de la integral se reduce a

$$\frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{1}{x} \, d\Sigma_c = \frac{1}{4} \int_0^\infty [(a+b+c) \operatorname{sen} (a+b+c)\, x +$$

$$(a+b-c) \operatorname{sen} (a+b-c)\, x - (a-b+c) \operatorname{sen} (a-b+c)\, x -$$

$$-(a-b-c) \operatorname{sen} (a-b-c)\, x] \, \frac{dx}{x}$$

y razonando como en la primera parte, su valor es

$$\frac{1}{4} \, [(a+b+c) + (a+b-c) - (a-b+c) - (a-b-c)] \, \frac{\pi}{2}$$

o sea

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} b.$$

III. Transformando el producto en sumas se tiene

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{4}\int_0^\infty [\operatorname{sen}(a-b+c)x - \operatorname{sen}(a-b-c)x$$
$$-\operatorname{sen}(a+b+c)x + \operatorname{sen}(a+b-c)x]\frac{dx}{x^3}.$$

Integrando por partes y designando por Σ_s la suma contenida en el paréntesis, obtenemos

$$[-\frac{1}{8}\frac{1}{x^2}\Sigma_s]_0^\infty + \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{1}{x^2} d\Sigma_s$$
$$= [-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx]_0^\infty + \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{1}{x^2} d\Sigma_s.$$

Por ser $\lim -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx = 0$ para $x \to 0$ y para $x \to \infty$ el valor de la integral se reduce al del segundo término, o sea,

$$\frac{1}{8}\int_0^\infty [(a-b+c)\cos(a-b+c)x - (a-b-c)\cos(a-b-c)x$$
$$-(a+b+c)\cos(a+b+c)x + (a+b-c)\cos(a+b-c)x]\frac{dx}{x^2}.$$

Calculando la integral del primer sumando, se tiene

$$\frac{1}{8}(a-b+c)\int_0^\infty \cos(a-b+c)x\frac{dx}{x^2} =$$
$$[-\frac{1}{8}(a-b+c)\frac{1}{x}\cos(a-b+c)x]_0^\infty$$
$$-\frac{1}{8}(a-b+c)^2\int_0^\infty \operatorname{sen}(a-b+c)x\frac{dx}{x}.$$

Recordando que la última integral vale $\frac{\pi}{2}$ y generalizando el resultado para los demás sumandos, el valor de la integral está dado por

$$\Big| -\frac{1}{8}\frac{1}{x}[(a-b+c)\cos(a-b+c)\,x-(a-b-c)\cos(a-b-c)x$$

$$-(a+b+c)\cos(a+b+c)\,x+(a+b-c)\cos(a+b-c)\,x]\Big|_0^\infty$$

$$-\frac{1}{8}[(a-b+c)^2-(a-b-c)^2-(a+b+c)^2$$

$$+(a+b-c)^2]\,\frac{\pi}{2}.$$

Como el límite del primer término es 0 tanto para $x \to 0$ como para $x \to \infty$, el valor de la integral estará dado por el segundo, o sea

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \,\frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2}\,bc.$$

IV. Supongamos ahora $a < b + c$.

a) Transformando el producto de cosenos en suma, obtenemos

$$\operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} ax\,[\cos(b+c)\,x - \cos(b-c)\,x].$$

Se nos presentan ahora dos posibilidades en relación con las constantes a, b y c.

1°. $a > b - c$. En este caso es

$$\operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx = \frac{1}{4}[\operatorname{sen}(a+b+c)\,x - \operatorname{sen}(b+c-a)\,x +$$

$$+\operatorname{sen}(a+b-c)\,x + \operatorname{sen}(b-a-c)\,x]$$

y en consecuencia, según se calculó en el primer caso, será

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

2º. $a < b - c$. En este caso es

$$\operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx = \frac{1}{4} [\operatorname{sen} (a + b + c) x -$$

$$- \operatorname{sen} (b + c - a) x + \operatorname{sen} (a + b - c) x - \operatorname{sen} (b - a - c) x]$$

y por tanto

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \frac{dx}{x} = 0.$$

b) En este segundo caso, el resultado de transformar en suma es independiente de las relaciones entre a, b, c, luego el valor de la integral es, como habíamos calculado, $\frac{\pi}{2} b$.

c) En la tercera expresión, tenemos que

$$\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} ax [\cos (b - c) x - \cos (b + c) x].$$

Se presentan ahora dos posibilidades:

1º. $a > b - c$. En este caso se tiene

$$\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx = \frac{1}{4} [\operatorname{sen} (a + b - c) x + \operatorname{sen} (a - b + c) x -$$

$$\operatorname{sen} (a + b + c) x + \operatorname{sen} (b + c - a) x)]$$

y como en el caso $a > b + c$, el valor de la integral es

$$\Big| -\frac{1}{8} \frac{1}{x} [(a + b - c) \cos (a + b - c) x + (a - b + c) \cos (a - b + c) x$$

$$- (a + b + c) \cos (a + b + c) x +$$

$$(b+c-a)\cos(b+c-a)\,x]\Big|_0^\infty - \frac{1}{8}[(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-$$

$$(a+b+c)^2+(b+c-a)^2]\frac{\pi}{2},$$

y como el límite del primer término es 0 tanto para $x \longrightarrow 0$ como para $x \longrightarrow \infty$ el valor de la integral es

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{4}[2ab+2ac+2ab-a^2-b^2-c^2]\frac{\pi}{2}.$$

2º. $a<b-c$. En este caso

$$\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx = \frac{1}{4}[\operatorname{sen}(a+b-c)\,x - \operatorname{sen}(b-c-a)\,x -$$

$$-\operatorname{sen}(a+b+c)\,x + \operatorname{sen}(b+c-a)\,x].$$

En consecuencia, el valor de la integral es

$$\Big| -\frac{1}{8}\,\frac{1}{x}[(a+b-c)\cos(a+b-c)\,x -$$

$$-(b-c-a)\cos(b-c-a)-$$

$$(a+b+c)\cos(a+b+c)\,x + (b+c-a)\cos(b+c-a)\,x]\Big|_0^\infty -$$

$$-\frac{1}{8}[(a+b-c)^2-(b-c-a)^2-(a+b+c)^2+(b+c-a)^2]\frac{\pi}{2}$$

o sea

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2} ac.$$

Es interesante generalizar estos resultados al caso en que se consideren los integrandos con m factores, siempre que agreguemos en las expresiones hasta ahora vistas únicamente factores cosenos. Sólo consideraremos el caso en que $a>b+c+d+\ldots+m$. Se trata entonces de calcular el valor de las expresiones

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \cos dx \ldots \cos mx \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx \cos dx \ldots \cos mx \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \cos dx \ldots \cos mx \frac{dx}{x^3}.$$

En los tres casos, con cada factor coseno que se agrega, al transformar en suma se duplica el número de términos, pero se introduce un factor 1/2, sin cambiar el nombre de las funciones trigonométricas ya obtenidas; luego como el número de términos es en las tres expresiones (al transformarlas en suma) 2^{m-1}, se tiene:

En la primera el valor es $\dfrac{1}{2^{m-1}} 2^{m-1} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

En la segunda, razonando como en el caso de tres factores el valor es $\dfrac{1}{2^{m-1}} \dfrac{\pi}{2} \Sigma k$ designando con Σk la suma de las constantes que figuran en los argumentos obtenidos al transformar en suma, afectados por el signo de la función correspondiente. Pero en Σk se anulan todos los términos excepto el b; luego el valor de la integral es $\dfrac{\pi}{2} b$.

Análogamente, en la tercera, el resultado está dado por

$$\frac{1}{2 \,.\, 2^{m-1}} \Sigma k^2 \,.\, \frac{\pi}{2},$$

pero en Σk^2 se anulan todos los términos excepto bc, luego el valorlor de la integral es

$$\frac{1}{2 \,.\, 2^{m-1}} \,.\, 2^{m-1} \,.\, 2 \,.\, bc \,.\, \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} bc.$$

Estas integrales son un caso particular de una más general,

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \ldots \operatorname{sen} hx \frac{dx}{x^n}$$

donde el número de factores es n.

Integrando sucesivamente por partes y eliminando los primeros términos que se obtienen, pues su límite para $x \longrightarrow 0$ y $x \longrightarrow \infty$ es 0, en su expresión final el valor de la integral estará dado por una expresión del tipo

$$\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{\pi}{2} \Sigma k^{n-1}$$

cualquiera que sea el exponente entero n.

Como en los casos anteriores, en Σk^{n-1} se anulan todos los términos excepto el $bcd \ldots h$, cuyo coeficiente en los 2^{n-1} términos es $(n-1)!$; luego el valor de la integral es

$$\frac{\pi}{2} b\, c\, d \ldots h.$$

Más general aún, si agregamos factores coseno, el valor de la integral no altera, siendo

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \ldots \operatorname{sen} hx \cos lx \cos mx \ldots \cos qx \frac{dx}{x^n} = \frac{\pi}{2} b\, c \ldots h.$$

Andrés Valeiras

GUIDO FUBINI

(1879-1943)

El día 6 de Junio último pasado falleció en Nueva York Guido Fubini. Había nacido en Venecia (Italia) el 19 de Enero de 1879; cursó sus estudios de matemática en Pisa, donde se educó en la escuela de Ulisse Dini y particularmente de Luigi Bianchi. La influencia de Bianchi hízose sentir sobre la orientación del pensamiento científico de Fubini, todavía muchos años después de abandonar las aulas de Pisa; lo que confirma cuánta importancia puede llegar a tener aun sobre un espíritu original e independiente como el de Fubini, el estudiar con un gran maestro. Al poco tiempo de recibirse empezó Fubini, su enseñanza en las universidades de Catania y Génova, hasta que, al instituirse en la Escuela de Ingeniería de Turín una nueva cátedra de Análisis matemático (distinta de la que dictaba y siguió dictando Peano en la Universidad de la misma ciudad), Fubini fué llamado a hacerse cargo de ella. Conservó tal cátedra hasta 1938, enseñando al mismo tiempo Análisis superior en la Universidad. Al ser alejado de su cátedra a raíz de las leyes antisemitas, se trasladó a Estados Unidos actuando en el Institute for Advance Study de Princeton durante el trienio 1939-1941; en la primavera de 1941 también dictó un curso sobre Balística exterior en la New York University. Su gratitud hacia el país que le acogió y su estusiasmo por el Hemisferio occidental parecieron infundirle nueva vida; sin embargo su salud había sido irremediablemente quebrada por los acontecimientos, y en los primeros meses de 1942 dejó Princeton para establecerse en Nueva York, donde, a pesar de la enfermedad del corazón que le aquejaba, siguió dedicándose en su casa a sus estudios predilectos hasta que sobrevino la muerte.

Al disponerme a relatar muy brevemente sobre la personalidad científica de Fubini, para los lectores de la Revista de la Unión Matemática Argentina, de acuerdo con la honrosa invitación del Profesor Rey Pastor, me encuentro frente a un problema bastante arduo, debido a la necesidad de fragmentar en elementos un todo único. En primer término la persona de Fubini, llena de entusiasmos y rebosante de vivacidad, mal puede separarse de sus trabajos con el brillo de su estilo, con su nítida claridad en la forma de plantear los problemas y colocarlos en el marco de problemas ya conocidos, con su manera de acometerlos sin temor a las dificultades. Casi parece que su figura siempre en movimiento, que el rápido acento de su voz fuerte y llena de inflexiones expresivas surjan de sus páginas. Nos da Fubini una confirmación de que la matemática no es cosa frígida e impersonal. Por otro lado su pensamiento en gran parte es unitario, aun cuando parece tomar interés en tópicos distintos.

Sea lo que fuere, numerosísimos entre los trabajos de la primera década de su producción giran alrededor de la teoría de los grupos: al principio se trata particularmente de grupos contínuos (p. e. espacios que admiten un grupo continuo de movimientos, o un grupo conforme; grupos de transformaciones geodésicas, etc.); pero pronto la atención de Fcbini se dirigió más bien a los grupos discontínuos infinitos y las funciones automorfas. Su libro *''Introduzione alla teoría dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe''* (Pisa, 1908) cierra precisamente este período. Por supuesto con esas investigaciones se entrelazan otras de rumbo distinto, p. e. sobre las formas hermitianas y las métricas que ellas definen.

Otro motivo alrededor del cual se ha desarrollado buena parte de la actividad de Fubini está integrado pir el problema de Dirichlet y demás problemas al contorno, particularmente en relación con los métodos variacionales. Entre sus trabajos pertinentes a tal orden de ideas, la mayor parte de los cuales se remonta a años ya lejanos (huelga rerordar que al principio del siglo Hilbert había hecho revivir, fundamentándolo en nuevas bases, ese tan poderoso principio de Dirichlet que yacía despreciado después de la crítica demoledora de Weierstrass), recordamos en particular su colaboración *''El principio de mínimo''* publicada en 1935 en la Revista Matemática Hispano-Americana (la cual ya había publicado otros trabajos de Fubini, p. e. de geometría diferencial en 1921, y en 1929 la necrología de Bianchi; también en 1935 publicó de Fubini *''Sobre la flexión de la viga de pequeña curvatura''*).

A esto hay que agregar varios trabajos sobre distintos tópicos de análisis (ecuaciones diferenciales, integrales dobles y múltiples, ecuaciones integrales, series de funciones, etc. etc.). En ciertos momentos de su vida, ejercieron atracción sobre Fubini otros problemas, como los de balística exterior, y la teoría de la viga.

Sin embargo, hay otra rama que representa casi treinta años del pensamiento matemático de Fubini (desde luego sin agotarlo), y es la geometría proyectiva diferencial. En 1914 apareció su primer trabajo *''Definizione proiettivo-differenziale di una superficie''*, publicado en los Atti dell'Accademia di Torino, y ya en 1931 una nómina de trabajos de Fubini sobre tal tópico comprendía 46 números (de acuerdo con un elenco provisional hay que agregar 8 trabajos posteriores a ese año). No sólo, sino que me atrevo a decir una cosa, que quizás a Fubini no le agradaría mucho, y es que si hay una rama de la matemática en la cual se recordará durante mucho tiempo el nombre de Fubini, es precisamente ésta. Muchas veces hemos conversado con Fubini acerca de cuáles resultados de tal o tal matemático quedarán como adquisiciones efectivas y definitivas en la ciencia, y aún me parece verle sacudir pesimísticamente y negativamente su cabeza y afirmar que casi todo perecería muy pronto. No pensaba yo entonces ser llamado tan pronto a intentar una previsión a su respecto, y siento mucho que probablemente mi juicio no le gustaría. El nació analista y vivió analista y siempre se sintió profundamente analista. Sin embargo su actuación anterior en la dirección clásica de la geometría diferencial (que había quedado en él como uno de los rasgos heredados en la escuela de Bianchi) y quizás su espíritu de aventura científica lo llevaron a encarar y construir de manera sistemática la geometría proyectiva diferencial fundándola en la teoría de las formas diferenciales, análogamente a lo que hicieran Gauss y sus continuadores para la teoría métrica de las superficies. Se encontró así Fubini actuando como uno de los fundadores de esa rama (otro es Wilczynski, el cual sin embargo acudió a métodos analíticos distintos), y después de haber creado el instrumento supo usarlo con el entusiasmo de un pioner y la habilidad de un maestro. Lo que sí puede decirse es que siempre me pareció analista Fubini aún en la geometría diferencial, en donde el espíritu analítico muy a menudo lo ha guiado a crear los conceptos geométricos más escondidos. La teoría que vino construyendo se encuentra expuesta sistemáticamente en las dos obras de conjunto *''Geometría proiettiva differenziale''* (Bologna, 1926-27) e *''Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces''* (Paris, 1931), escritas ambas en colaboración con E. Čech.

Fubini ha tenido calidades didácticas de primer orden: creo que raramente se encuentran reunidas en una misma persona condiciones de investigador y de expositor como en Fubini. Sus estudiantes de la Escuela de Ingeniería de Turín lo idolatraban, y con mucha razón, pues varios millares de ingenieros que han salido de esa casa de estudio a él le debieron su sólida formación matemática. La vivacidad de sus escritos se multiplicaba aun más en sus clases, donde todos los conceptos salían con un relieve que les daba una claridad inolvidable y un empuje que los grababa en forma definitiva en el auditorio. Sus *''Lezioni di analisi matematica''* (STEN, Torino), de las cuales se han sucedido varias ediciones a partir de 1912, reproducen sus cursos dictados a los estudiantes de ingeniería, y quedan como modelo de simplicidad y claridad. Mucho éxito tuvieron asimismo los *''Esercizi di analisi matematica''* escritos en colaboración con G. Vivanti (STEN, Torino, 2ª ed., 1930). También redactó Fubini una exposición de conjunto sobre *"Matemática de los ingenieros"*, en la cual desarrolla en sus partes esenciales los conocimientos útiles a los ingenieros: se espera que el libro sea publicado pronto en idioma castellano, y la publicación no dejará de ser sumamente provechosa para estudiantes e ingenieros.

Fubini ha sido un hombre generoso y bueno: su apoyo material y moral nunca ha faltado a las personas que a él se dirigieron. Sentía profundamente la amistad; y nunca lo olvidarán los amigos que durante muchos años han discutido con él, día tras día, problemas de ciencia y vida, que han participado de sus afanes y sus inquietudes, que — aún a través de las grandes distancias que los han separado — siempre se han mantenido espiritualmente cerca de él.

Universidad Nacional de Tucumán, Abril de 1944.

Alejandro Terracini

CRONICA

DISTINCION AL DOCTOR ESTEBAN TERRADAS

La Universidad de Tolouse acaba de conferir el grado de doctor honoris causa al doctor Ing. ESTEBAN TERRADAS, miembro titular de la Unión Matemática Argentina. Es bien conocida por nuestros lectores la personalidad científica, una de las más vigorosas en el mundo de habla española, de TERRADAS. Nacido en 1883, se graduó en ingeniero industrial y luego en doctor en ciencias exactas, iniciando brillantemente la carrera del profesorado universitario dictando sucesivamente en Madrid, Zaragoza y Barcelona. Su actividad intelectual desplegada en el ejercicio de las técnicas más diversas se ha repartido entre la ciencia pura y la ciencia aplicada, sobresaliendo en ambas.

Hace algunos años estuvo entre nosotros, dictando cursos y realizando labor científica en las universidades de Buenos Aires, La Plata y otros centros del interior, dejando tan honda huella sus enseñanzas, que destacados intelectuales se han dirigido al gobierno español pidiendo que se renueve su visita a nuestro país, deseosos de aprovechar sus extraordinarias aptitudes.

A su larga lista de distinciones académicas y honoríficas se agrega hoy esta merecida distinción que le acaba de conferir la Universidad de Toulouse por la cual enviamos al distinguido profesor las más cordiales congratulaciones.

LAS REUNIONES DEL "NUCLEO DE FISICA"

En el próximo número publicaremos los resúmenes de los *Informes* y *Comunicaciones*, presentados en las dos primeras reuniones del "Núcleo de Física", organizadas por el profesor Doctor Guido Beck (Córdoba) con el fin de estimular los estudios sobre la moderna orientación de la física. La primera reunión se efectuó en Córdoba, en el Observatorio Astronómico, los días 27 y 28 de noviembre de 1943 y fué presidida por el Doctor Enrique Gaviola. La segunda reunión se celebró en el Instituto de Física de Buenos Aires, los días 12 y 13 de abril del corriente año y fué presidida por el Profesor Doctor Teófilo Isnardi. La tercera reunión se celebrará próximamente en La Plata.

Los trabajos presentados en las dos primeras reuniones son los siguientes:

Primera reunión

Informes: C. Mossin Kotin (Buenos Aires): *El problema de intensidad en la teoría de la difusión de los rayos X.* — G. Beck (Córdoba): *Polarización de rayos neutrónicos.* — G. Beck (Córdoba): *El estado actual de la teoría del mesotón.*

Comunicaciones: E. Gaviola (Córdoba): *El fenómeno cometario.* — R. Platzeck (Córdoba): *Teoría de los errores de sistemas ópticos.* — J. Bobone Córdoba): *Cálculo de la precesión de los equinoccios para estrellas circumpolares.*

Segunda reunión

Informes: G. Beck (Córdoba): *Trabajos nuevos sobre la teoría del campo.*

Comunicaciones: E. Galloni (Buenos Aires): *Sobre la estructura cristalina del Pt_3O_4.* — R. H. Busch y J. T. D'Alessio (Buenos Aires): *Sobre los óxidos de Platino.* — R. Platzeck (Córdoba): *Un nuevo método de fotometría.* — E. Gaviola (Córdoba): *Modelos físicos de Novae.* — G. Knie (Buenos Aires): *Anillos algebraicos en la teoría del spin.* — R. Platzeck (Córdoba): *Teoría general de los errores ópticos.* — J. T. D'Alessio (Buenos Aires): *Sobre la medición de la tensión superficial de los líquidos.* — M. Bunge (Buenos Aires): *Una nueva representación de los tipos de fuerzas nucleares.*

VARIA

16. *Reformas racionales y reformas históricas del calendario.*

Es sabido que el problema del calendario consiste en buscar reglas según las cuales N años trópicos (que para los cien primeros siglos de la era cristiana tienen por valor medio 365,242008 días medios) coincidan con N años civiles (cada uno de ellos de un número entero de días medios), de manera que su solución dependerá de la descomposición más o menos cómoda de la fracción decimal 0,242008 en expresiones racionales simples.

Despreciando los 0,000008 que significan un día de atraso por cada 125000 años, hay que descomponer la fracción 0,242; utilizando fracciones de numerador uno, esa descomposición puede hacerse de los modos siguientes:

$$0{,}242 = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{500} = \frac{1}{4} - \frac{1}{125} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{500}$$

cada uno de las cuales podría dar lugar a un tipo de calendario.

Si en cambio se utilizan las fracciones contínuas tenemos

$$0{,}242 = (0,\ 4,\ 7,\ 1,\ 3,\ 2)$$

siendo las primeras reducidas $\frac{1}{4};\ \frac{7}{29};\ \frac{8}{33};\ \frac{15}{62}\ \ldots$

con cada una de las cuales también puede llegarse a un tipo de calendario.

Las reformas históricas han procedido de un modo menos racional. Al calendario egipcio de 365 días y cuyo establecimiento se ha fechado (conjeturalmente) en el año 4228 a. C. siguió la reforma juliana, el año 45 a. C., que introdujo el año bisiesto cada 4 años y por lo tanto adoptó para el año civil un valor medio de 365, 25 días medios, y la reforma gregoriana, en 1582, que al considerar no bisiestos a los años múltiplos de 100 que no lo fueran de 400 adopta como valor medio del año civil 365, 2425 días medios. Queda por lo tanto a considerar, respecto del valor medio 0,242, un error por exceso de 1 día cada 2000 años que podría tomarse en cuenta no considerando bisiesto los años múltiplos de 2000.

Entre las reformas propuestas cabe recordar la del astrónomo y matemático Omar Khayyam (probablemente el poeta autor de los conocidos Rubaiyat) de la segunda mitad del s. XI que consiste, según las tres interpretaciones más probables que adoptan actualmente los historiadores; en tomar 17 días intercalares en 70 años, o 15 en 62 u 8 en 33, observando que las dos últimas interpretaciones coinciden con dos reducidas sucesivas de 0, 242 ambas más aproximadas que el valor dado por la reforma gregoriana.