

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

ORGANO DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

REDACTADA por

J. Babini (Director), J. Rey Pastor, L. A. Santaló y E. Gaviola (Delegado de la A. F. A.)



MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. BABINI (Santa Fe) (fundador). — M. BALANZAT (San Luis). — J. BARRAL SOUTO (B. Aires) (fundador). — C. A. BULA (Rosario) (fundador). — E. COROMINAS (Mendoza). — E. CHICHIZOLA (Rosario). — C. DIEULEFAIT (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES (B. Aires) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe) (fundador). — Y. FRENKEL (B. Aires). — E. GASPAR (Rosario) (fundador). — F. L. GASPAR (Rosario) (fundador). — J. GIANNONE (Rosario) (fundador). — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires) (fundador). — J. GONZÁLEZ GALE (Buenos Aires) (fundador). — M. GUITARTE (Buenos Aires) (fundador). — W. S. HILL (Montevideo) (fundador). — C. ISELLA (Rosario) (fundador). — H. MAGLIANO (La Plata). — OBSERVATORIO ASTRONÓMICO (La Plata). — J. OLGUÍN (Rosario) (fundador). — P. PI CALLEJA (San Juan). — E. R. RAIMONDI (Buenos Aires) (fundador). — J. E. REYNAL (Buenos Aires). — J. REY PASTOR (Buenos Aires) (fundador). — E. L. SAMATÁN (Buenos Aires) (fundador). — L. A. SANTALÓ (Rosario) (fundador). — J. SORTHEIX (Tucumán) (fundador). — D. T. A. DE SPELUZZI (Buenos Aires) (fundador). — E. TERRADAS (La Plata) (fundador). — F. TORANZOS (La Plata).



BUENOS AIRES

1945

S U M A R I O

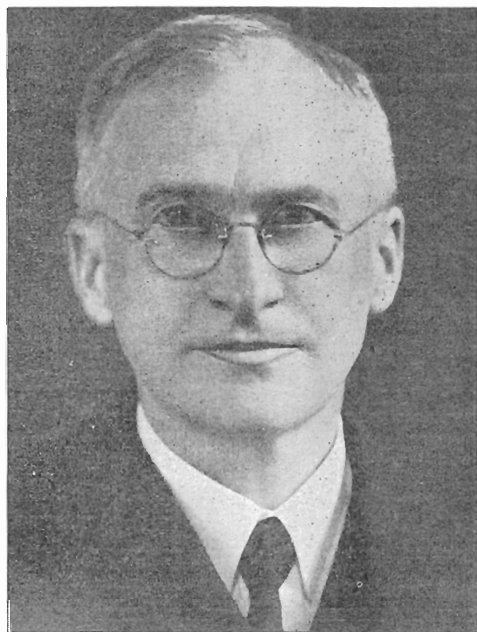
	Pág.
El profesor George D. Birkhoff y su influjo en la Argentina, por J. Rey Pastor	65
<i>Crónica.</i> — Sesión científica de la Unión Matemática Argentina . . .	68
Generalización del círculo de Mohr y de la elipse de Lamé, por N. Krivoshein	69
Varia Nº 18	77
Problemas mixtos de Dirichlet, por J. Rey Pastor	78
Derivación e integración de funciones de variable real, tomadas en valor absoluto (Manuscritos póstumos), por A. Fraile	84
<i>Bibliografía.</i> — Beppo Levi, Sistemas de ecuaciones analíticas en términos finitos, diferenciales y en derivadas parciales (P. Pi Calleja)	93

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de
la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPañÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE, INGENIO AZUCARERO "ARNO" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G. BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUITARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPARE (Rosario). — CARLOS ISELLA (Rosario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).

EL PROFESOR GEORGE D. BIRKHOFF Y SU INFLUJO EN LA ARGENTINA



Todos los miembros de la UNION MATEMATICA ARGENTINA que conocieron al profesor Birkhoff, y al conocerlo quedaron prendidos en los lazos de su amistad y encantados por la simpatía que irradiaba su excepcional personalidad, rinden en esta breve página dolorido homenaje al que fué su colega honorario, elegido por aclamación, quien apreció como nadie la tesonera labor de nuestra asociación, que consideraba admirable y hasta heroica, en ambiente tan poco propicio.

En el confin de los dos siglos, el gigante país del norte había alcanzado ya su plenitud física; pero los valores culturales más nobles apenas se insinuaban. En el campo matemático pudo Birkhoff proseguir la obra iniciada por Peirce, Gibbs, Bôcher, Moore, Osgood, luchando con la falta de ambiente, natural en todo país nuevo, regido por el pragmatismo de los es-

forzados pioneers que edificaron la nación y organizaron la explotación de sus riquezas.

Quien luchó por aclimatar la investigación científica en país de gloriosa estirpe intelectual, pero de orientación utilitaria, urgido de prisa en cosechar tempranos frutos, sabía por experiencia propia cuán delicada planta es la investigación desinteresada en las ciencias abstractas y cuán fácilmente se malogra su raquítica vida, nacida casualmente de la milagrosa germinación de algunas raras semillas finas, entreveradas en el copioso grano vulgar; sabía la trascendencia que para el porvenir de un país tiene el defender esa frágil vida de la injuria del inevitable viento y del pisotón brutal; hasta que las raíces se extiendan y vigoricen, y su vida quede, no ya tolerada, sino protegida por el Estado, como importante función social.

Muchos de los muchos sabios extranjeros que hicieron su *tournée* sudamericana, sabían muy bien esto mismo; todos ellos se dieron cuenta de la mísera vida de esta incipiente investigación, porque no encaja en nuestra política universitaria, que antes necesita nuevas cátedras, con miras electorales; todos lo vieron y comentaron en privado, pero todos se callaron con egoísta discreción; uno sólo se interesó por nuestro vital problema e hizo cuanto pudo para resolverlo, con generosa solicitud.

Recordemos con gratitud emocionada su inquisitivo interés por el progreso argentino, desde el mismo día de su llegada. Muy cortesmente supo romper el cerco que en torno de cada egregio visitante suele formar el pintoresco círculo de pseudo-sabios exhibicionistas, entremezclados con algún vividor; y dedicando un tiempo mínimo a cumplir exquisitamente los deberes de cortesía, consagró todo su tiempo y su alma entera a descubrir los «jóvenes que prometen». Bajo su amistosa pero insistente presión hubo que realizar una caza metódica en las diversas zonas universitarias, presentándoselos uno a uno, como él quería, para confesarlos a solas, con sigilo de sacramento. Entre los muchos jóvenes promisoires descubrió con tan óptimo método a los pocos que algo podrán dar de sí; y entre ellos a los poquísimos que ya dan algo. Y preparando, tras el minucioso reconocimiento del terreno, su estratégico plan de acción, contando con la ayuda financiera de las generosas instituciones que desparraman su protección sobre los países capaces de aprovecharla eficazmente, dirigió su acometida a las autorida-

des y personajes oficiales de diversa categoría. También éstos son hombres que prometen. Y tras esta consoladora conclusión, que nadie ignoraba entre nosotros, terminaron sus esperanzas y también las nuestras.

Quien desconozca los argumentos de suprema dignidad que suelen ser usados para defenderse de tales sospechosas donaciones, puede encontrarlos entre los que usó el suspicaz cabildo montañés —según nos relató Pereda—, para rechazar el reloj destinado a la torre, que había donado un ingenuo indiano enriquecido. En cuanto a la desgracia sufrida por las donaciones de argentinos (pocas hasta ahora, ninguna probablemente en lo porvenir) habría que recurrir a otro género de literatura.

Cada hombre crea el mundo a su imagen y semejanza; el mezquino procura interpretar peyorativamente la generosidad ajena, que no comprende; el impotente egoísta no cree en la verdad de las investigaciones de otros, ni puede entender sus móviles, que juzga a su manera. Todavía no se ha aclimatado entre nosotros la religión de la cultura y todos no podemos comprender ciertas virtudes místicas, de idealismo generoso, que en los grandes países, más por su alma que por su cuerpo, florecen con igual magnitud que sus grandes defectos. No es parva muestra de generosidad la que nos dan al permitir a los demás países aprovecharse de sus inventos, sin molestarse siquiera en colaborar en la tarea común, que exige cuantiosos sacrificios.

¡Que inventen ellos, que son ricos! y aprovechemos nosotros sus drogas curativas. Pero ignora, quien así razona, que la invención no es secuela, sino causa de la riqueza.

El fracaso de la tesonera acción de Birkhoff en pro del desarrollo de la investigación matemática en la Argentina, era fatal; pero nos queda el consuelo de haber confirmado durante su convivencia entre nosotros la idea que ya se había formado al comparar la producción de los diversos países: sólo de la Argentina y Perú —solía decir— cabe esperar su incorporación a los países productores de Matemática; allí por sus directores; aquí por la existencia de un núcleo ya formado de jóvenes con suficiente preparación. La admirable comprensión de las autoridades académicas limeñas va logrando, más visiblemente cada día, este lauro para su país, profetizado por el gran maestro.

No es el tema de esta apresurada nota el análisis de sus creaciones científicas. «*Pauca sed matura*» fué su lema; sólo se asomaba a la publicidad cuando tenía algo muy nuevo que comunicar; algo que perdurase en la ciencia, como adquisición duradera. Y en esta obra de selección, propia de una inteligencia sibarita, basta citar tres éxitos que aseguran su inmortalidad: venció con ingenio sumo las dificultades topológicas ante las que fracasó la tenacidad del genial Poincaré, sacando después preciosas aplicaciones de la fecunda verdad entrevista por éste, con que cerró su obra gloriosa; abrió nuevos rumbos al Análisis con la introducción del método topológico, cada día más eficaz; demostró el teorema ergódico, con alcance que nadie soñaba.

No es preciso analizar más de su obra, en la que hay sin duda otras importantes novedades; con estas tres ideas, que abren amplias vías al Análisis, a la Mecánica, a la Física, queda asegurado su alto puesto en la fama; con sus virtudes personales conquistó el afecto de cuantos lo conocieron; con su generoso interés en pro de los países continentales, tras haber dado gloria a su patria, amplió a lejanas latitudes el círculo de sus agradecidos admiradores.

Vida lograda y envidiable. Dichoso el país que produce tales hombres.

J. Rey Pastor.

C R O N I C A

SESION CIENTIFICA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

El 18 de setiembre de 1944 se reunieron en el local del Seminario Matemático, calle Perú 222 (Buenos Aires), los miembros de la U. M. A. bajo la presidencia del ingeniero Pedro Rossell Soler, quedando aprobada el acta de la sesión anterior y el convenio *ad referendum* entre la U. M. A. y la Asociación Física Argentina. A continuación expusieron sus autores los trabajos científicos siguientes:

JOSÉ A. BALSEIRO. *Tricomplejos antoidales y funciones de estas variables.*

YANNY FRENKEL. *Teoremas de unicidad de las integrales de Perron y de Denjoy para funciones no aditivas.*

GREGORIO KLIMOVSKY. *Algebras de Boole sin átomos.*

JUAN C. GRIMBERG. *Acercas del isomorfismo entre anillos de Boole y Algebra de Clases con algunas conclusiones para la Logística.*

ALBERTO CALDERÓN. *Un problema de contorno de Funciones Analíticas.*

A. EIDLICZ. *Espacios métricos generalizados.*

GENERALIZACION DEL CIRCULO DE MOHR Y DE LA ELIPSE DE LAMÉ

por NICOLÁS KRIVOSHEIN
(Asunción, Paraguay)

SUMMARY. — It is shown that the graphic representation of the tensors (affinors, dyadics) by means of the Lamé's ellipse and Mohr's circle, used till now only for symmetrical tensors, is also applicable to the whole class of the tensors of the second range in two dimensions.

For the ellipse, the proof is done using the linear functional relation between two vectors, given by the tensor.

For the circle, it is the usual method of plotting an ellipse that gives the proof.

The ellipse of the general tensor is some bigger than that of the symmetrical tensor and is turned in the direction of the antisymmetrical component. His data are given by the expressions (5) and the plotting is shown in the fig. 4.

The circle of the general tensor has the same diameter as that of the symmetrical one, but his center do not lie on the normal axis (as does the center of the Mohr's circle) but aside, in a distance equal to the antisymmetrical component.

Some applications to the Theory of Elasticity (total strain) are given.

For a three-dimensional tensor, the generalisation of the ellipsoide is true and easy to proof. About the generalisation of the usual three-circle diagram, the Author means that it would be some difficult to obtain it.

El círculo de Mohr y la elipse de Lamé (o elipse de intensidad) que tan útiles son en las aplicaciones prácticas del cálculo tensorial, se han aplicado hasta ahora exclusivamente a los tensores simétricos⁽¹⁾. Mientras tanto es fácil demostrar que ambas figuras se construyen también para los tensores generales en dos dimensiones. La necesidad de una tal generalización es ur-

⁽¹⁾ Por lo menos en todos los textos que el autor ha visto se hace así. Véase por ejemplo: Prof. ENRIQUE BUTTY, *Introducción a la Física Matemática*, Buenos Aires, 1931, tomo I, pp. 327-365; Dr. RICHARD GANS, *Introducción al Análisis Vectorial*, Editorial Labor, 1929, pp. 99-130; HÜTTE, *Manual del Ingeniero*, tomo I, 24 edición, versión castellana, pp. 161-162, 26ª edición, pp. 157-172; también diferentes textos de resistencia de materiales.

gente por tener los tensores generales varias aplicaciones, especialmente en la teoría de las deformaciones⁽²⁾.

Sea

$$\Phi_s = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (1)$$

un tensor simétrico duodimensional, referido a sus ejes principales⁽³⁾.

Para él, como se sabe, se verifican las siguientes construcciones de las figuras arriba mencionadas: fig. 1, círculo de Mohr;

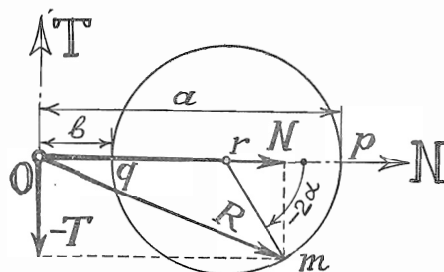


Fig. 1

fig. 2, elipse de Lamé. R es el vector resultante correspondiente a un versor Π arbitrario (el vector N es paralelo a ese ver-

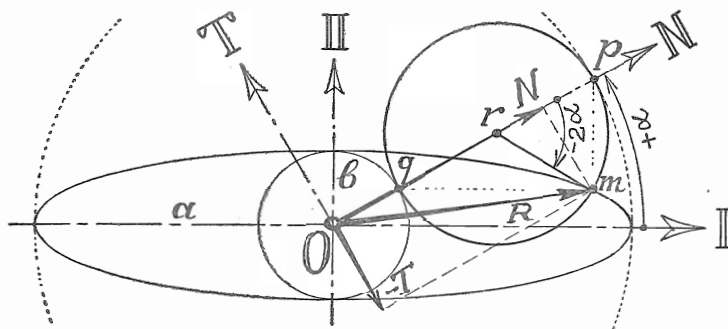


Fig. 2

(²) Véase, por ejemplo, la reciente publicación norteamericana CHARLES B. MORRIS, *Technique of Plywood*. En este libro, muy detallado, se hace uso del círculo de Mohr solamente para la deformación pura (que es un tensor simétrico), mientras que el giro se considera aparte.

(³) En las notaciones del Prof. Butty sería $a = a_{11}^*$; $b = a_{22}^{**}$.

sor). Su vértice m es el punto figurativo que recorre el círculo de Mohr en el sentido negativo dos veces mientras la elipse una vez en sentido positivo (cuando $ab > 0$, y en sentido negativo cuando $ab < 0$).

Siendo simétrico el tensor, son iguales los vectores Primero, Segundo y Resultante, de modo que es indiferente cuál de ellos consideramos. Cuando el tensor es un tensor general, se considera en las aplicaciones técnicas sea el vector Resultante (entonces el problema se reduce al de un tensor simétrico, por ejemplo la deformación pura); sea uno de los vectores Primero o Segundo (por ejemplo la deformación total). Cuál de los dos vectores viene a considerarse, depende del sistema de notaciones de los subíndices: si el primer subíndice corresponde a la componente del versor dado, y el segundo a la del vector, debe considerarse el vector Primero, en el caso contrario, el vector Segundo.

Ahora bien, sea

$$\Phi = \begin{bmatrix} a & -c \\ +c & b \end{bmatrix} \quad (2)$$

un tensor general duodimensional referido a sus ejes principales, siendo a, b sus componentes normales principales, $\pm c$ la componente giratoria⁽⁴⁾. Demostraremos a continuación que para este tensor también es posible construir un círculo análogo al de Mohr y una elipse análoga a la de Lamé y que el punto figurativo (m') de estas dos figuras será el vértice del vector (Primero o Segundo) correspondiente a un versor $\mathbf{n}$ dado.

De antemano debemos suponer que los ejes principales de la nueva elipse no van a coincidir con los ejes principales del tensor, formando cada uno con su correspondiente un determinado ángulo. Por eso tomemos unos ejes auxiliares I', II' inclinados con respecto a I y II en un ángulo φ . Luego determinamos las coordenadas x, y del vértice m' del vector en el sistema $I'OII'$ (fig. 3). Más tarde impondremos la condición de que los ejes I' y II' sean principales de la elipse que surge como lugar de los puntos m' .

(4) En las notaciones del Prof. Butty, al considerar el vector Segundo, sería $-c = a_{12}^*$, $+c = a_{21}^*$. Para el vector Primero sería al revés, pero también tendrían que cambiarse las filas por columnas y viceversa.

Del mismo modo que para el tensor simétrico, designamos por α el ángulo entre el eje principal I y el eje N del versor Π dado.

Para tener una demostración rigurosa de que el lugar de los puntos m' será una elipse debemos proceder como sigue:

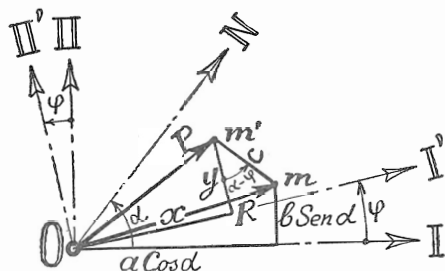


Fig. 3

1) Construir el vector (Primero o Segundo) Om' que se compone de tres vectores: de $a \cos \alpha$ y $b \sin \alpha$ que forman el vector resultante Om y del $c = mm'$ que es la componente giratoria o antisimétrica.

2) Tomar unos ejes I', II' arbitrarios, inclinados en φ con respecto a I, II .

3) Descomponer el vector Om' en sus componentes x e y paralelas a estos ejes.

4) Deducir las expresiones para x e y y ver si ellas representan la ecuación paramétrica de una elipse.

Dichas expresiones son

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha \cos \varphi + b \sin \alpha \sin \varphi - c \sin (\alpha - \varphi) \\ y &= -a \cos \alpha \sin \varphi + b \sin \alpha \cos \varphi + c \cos (\alpha - \varphi) \end{aligned} \quad (3)$$

que se transforman en

$$\begin{aligned} x &= (a \cos \varphi + c \sin \varphi) \cos \alpha + (b \sin \varphi - c \cos \varphi) \sin \alpha \\ y &= (-a \sin \varphi + c \cos \varphi) \cos \alpha + (b \cos \varphi + c \sin \varphi) \sin \alpha \end{aligned} \quad (3')$$

es decir, en funciones *lineales* de $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$, resultando ser x, y coordenadas de los puntos de una elipse.

Para hallar ahora los semiejes A y B de esta elipse, e

imponer la condición de que I' y II' sean las direcciones de sus ejes principales, hace falta introducir un argumento accesorio $\alpha + \vartheta$. Las coordenadas se expresarán entonces así

$$\begin{aligned} x &= A \cos (\alpha + \vartheta) = A \cos \vartheta \cos \alpha - A \sin \vartheta \sin \alpha \\ y &= B \sin (\alpha + \vartheta) = B \cos \vartheta \sin \alpha + B \sin \alpha \sin \vartheta . \end{aligned} \quad (4)$$

Igualando los coeficientes de (3') y de (4) se obtienen cuatro ecuaciones de las cuales se hallará

$$\begin{aligned} \vartheta &= \alpha \\ \operatorname{tg} 2\vartheta &= \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2c}{a+b} \\ A, B &= \frac{\sqrt{(a+b)^2 + 4c^2} \pm (a-b)}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

El argumento accesorio $\alpha + \vartheta$ se mide desde el eje I' , y siendo éste inclinado en φ con respecto a I , resulta que el nuevo radio (paralelo al eje N' en la fig. 4) que sirve para trazar la nueva elipse, debe inclinarse en $\varphi + \vartheta = 2\varphi$ con respecto al viejo radio (paralelo a N).

En la fig. 4 se ve el trazado de la elipse de los vectores

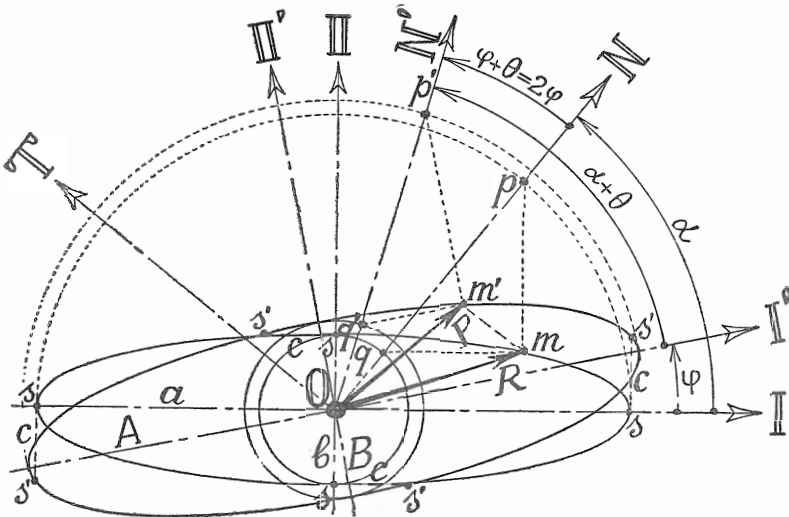


Fig. 4

resultantes o elipse de Lamé (semiejes a, b , radio N que coincide con el versor dado $\mathbf{n}$, punto figurativo m) y la de los vectores Primero o Segundo (semiejes A, B , radio N' , punto figurativo m').

Nótese también que los 4 segmentos ss' perpendiculares a los ejes I y II y el segmento mm' perpendicular a N , son todos iguales a la componente giratoria c .

Veamos ahora cómo se modifica el círculo de Mohr pasando de un tensor simétrico a un tensor general.

En el tensor simétrico, el segmento pq (figs. 2 y 4) era el diámetro de dicho círculo (fig. 1) y el triángulo pmq estaba inscrito en él. En el tensor general, es el segmento $p'q'$ (fig. 4) que debe formar el diámetro del círculo, *siendo siempre* N (no N') y T los ejes a que se refiere. El triángulo inscrito será ahora $p'm'q'$.

Para determinar las coordenadas del centro del círculo en el sistema NOT (fig. 5) se deduce, de la tercera de las (5)

$$\frac{A+B}{2} = \frac{\sqrt{(a+b)^2 + 4c^2}}{2}. \quad (6)$$

Comparando ésta con la segunda de las (5) se ve que los lados del triángulo rectángulo $Ot'r'$ (fig. 5) serán:

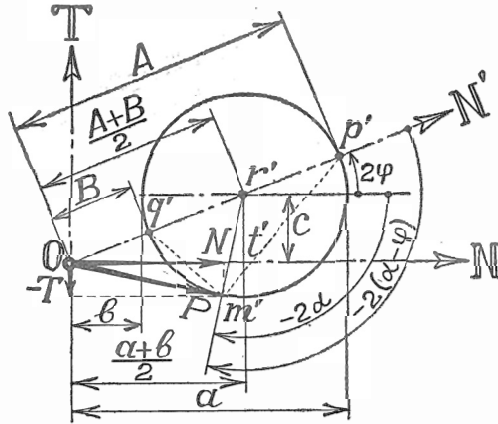


Fig. 5

$$Ot' = \frac{a+b}{2}, \quad t'r' = c, \quad Or' = \frac{A+B}{2} = \frac{\sqrt{(a+b)^2 + 4c^2}}{2} \quad (7)$$

es decir, que el punto t' coincide con el centro del círculo de Mohr y que el centro r' del nuevo círculo está encima del de Mohr a una altura c (o abajo, si $c < 0$).

De la tercera de las (5) se deduce también que

$$A - B = a - b$$

es decir, que los diámetros de ambos círculos son iguales.

A continuación consideraremos algunas aplicaciones prácticas de lo arriba expuesto.

Cabe recordar que en la teoría de las deformaciones el vector resultante representa el desplazamiento debido a la *deformación pura*, es decir, desplazamiento *relativo*, con respecto a un sistema móvil ligado a los ejes principales de deformación, mientras que el vector Primero o Segundo representa el desplazamiento debido a la *deformación total* (incluso el giro), es decir, desplazamiento *absoluto*.

De las dos figuras, especialmente el círculo del tensor general puede ser muy útil para la resolución de problemas prácticos. Su uso es igual que el del círculo de Mohr. Por ejemplo, en el caso de deformaciones, la abscisa del punto figurativo representa el alargamiento ϵ de un radio vector n , y la ordenada, su ángulo absoluto de giro γ (fig. 6). Los puntos u y v de

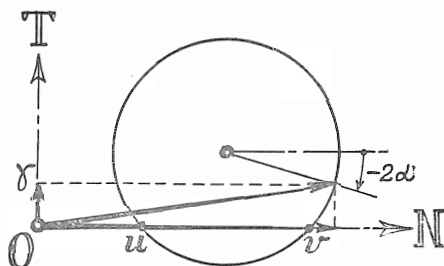


Fig. 6

intersección del círculo con el eje N , corresponden a dos direcciones para las cuales se anula el giro. Cuando el círculo se coloca enteramente a un lado del eje N , esto significa que el giro del elemento entero prevalece en toda parte sobre los giros producidos por la deformación pura, de manera que no hay radios vectores que giren en sentido opuesto.

cada con línea punteada en la fig. 8 (círculo de Mohr). Sus ordenadas extremas (puntos m_1, m_2) son $\pm \frac{\gamma_0}{2}$ con lo que se cumple la explicación.

Pasemos ahora a decir unas pocas palabras sobre la misma generalización a los tensores *tridimensionales*.

Basándonos en el hecho de que los vectores Primero y Segundo de un tensor general (no solamente del simétrico) son funciones lineales del versor dado, sería fácil demostrar que el lugar de los vértices de cada uno de estos vectores representa un elipsoide, generalizándose de esta manera el concepto del elipsoide de Lamé.

En lo que se refiere al concepto de diagrama de tres círculos que suministra las componentes normal y tangencial del vector Resultante, parece ser difícil hallar una generalización del mismo, al menos que se encuentre una hábil maniobra para salvar las dos siguientes dificultades:

1) Que el eje de giro no coincide (en el caso general) con ninguno de los ejes principales del tensor, de manera que tendríamos que colocar los tres círculos a diferentes alturas (que corresponden a las componentes del giro), destruyéndose todo el diagrama.

2) Que las ordenadas del diagrama representan los *módulos* de las componentes tangenciales, no pudiendo estos sumarse *algebraicamente* con las componentes giratorias (la suma debe ser *vectorial*).

San Bernardino (Paraguay), Febrero de 1944.

VARIA

18. — Es admirable como pudo Poincaré en su corta vida escribir más de 30 volúmenes y cerca de 500 memorias dispersas en las revistas del mundo entero. Sólo conozco a Berthelot cuya producción sea comparable con la suya. He vivido muy cerca de estos dos grandes hombres y lo que más me ha sorprendido es la prodigiosa actividad de sus espíritus y la rapidez de sus concepciones.

He visto a Poincaré en la Sorbona, en la Academia y en el Bureau des longitudes y dondequiera que se le proponía resolver alguna dificultad su respuesta partía con la rapidez de una flecha. Cuando escribía una memoria la redactaba de un tirón, apenas sin correcciones y sin volver sobre lo ya escrito. — *Darboux*.

PROBLEMAS MIXTOS DE DIRICHLET

por J. REY PASTOR

En diversas cuestiones de Física se presentan problemas del tipo siguiente: Conocidos en uno o varios arcos del contorno c los valores de una función u , armónica en el recinto que limita c ; y los valores de la conjugada v en los arcos restantes, determinar ambas funciones en todo el recinto, o sea la función analítica $f(z) = u + iv$. Este problema está incluido en otro más general; determinar u y v conocida una expresión lineal $au + bv$, de coeficientes variables, o bien constantes, pero distintos en diferentes arcos de c .

Las soluciones conocidas (cuya bibliografía nos ha facilitado gentilmente un distinguido colega) son muy complicadas por no haber reducido previamente el primer problema a su caso más simple; y nos proponemos mostrar brevemente que con tan elementalísimo artificio éste y otros problemas mixtos quedan incluidos en el clásico de Dirichlet. La única dificultad será la inherente a éste, sobre el comportamiento de la función en los puntos de discontinuidad infinita sobre el contorno; y también las delicadas condiciones de unicidad. Estas dos cuestiones no han sido resueltas todavía con generalidad; pero cuanto de ellas se sabe en el problema de Dirichlet es aplicable al problema mixto, que no es sino un caso particular de él.

El problema primero quedará resuelto apenas obtengamos solución para este otro, caso el más sencillo de aquél, por ser dos los arcos y constante una de las funciones:

I) *Determinar en el recinto simplemente conexo de contorno $c = \alpha + \beta$ funciones armónicas conjugadas u, v , regulares en el interior, con las condiciones siguientes de contorno:*

en α : $u = U$ (función integrable del arco)

en β : $v = 0$.

Más general: Sean U_r los valores conocidos de u en los arcos α_r ; V_r los valores conocidos de v en los arcos comple-

mentarios β_r , que componen conjuntamente el contorno c . Suponiendo resuelto el problema I, basta determinar en el recinto los $2n$ pares de funciones armónicas $(u_r, v_r), (u'_r, v'_r)$ por las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_n & \beta_1 & \beta_2 & \beta_n \\ \left\{ \begin{array}{l} u_1 = U_1, \\ u_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ u_n = 0, \end{array} \right. & \begin{array}{l} 0, \dots\dots 0 \\ U_2, \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, \dots\dots U_n \end{array} & & \begin{array}{l} v_1 = 0, \\ v_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ v_n = 0, \end{array} & \begin{array}{l} 0, \dots\dots 0 \\ 0, \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, \dots\dots 0 \end{array} & \\ \left\{ \begin{array}{l} u'_1 = 0, \\ u'_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ u'_n = 0, \end{array} \right. & \begin{array}{l} 0, \dots\dots 0 \\ 0, \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, \dots\dots 0 \end{array} & & \begin{array}{l} v'_1 = V_1, \\ v'_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ v'_n = 0, \end{array} & \begin{array}{l} 0, \dots\dots 0 \\ V_2, \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, \dots\dots V_n. \end{array} & \end{array}$$

Las funciones armónicas $u = \Sigma(u_r + u'_r), v = \Sigma(v_r + v'_r)$, son conjugadas y toman los valores prefijados en los respectivos arcos.

Método I. El problema I es en esencia equivalente al de Dirichlet. Suponiendo que el recinto es el primer cuadrante, siendo β el semi-eje $+x$, α el semi-eje $+y$, si se aplica la simetría respecto del eje x se tiene el semiplano $x \geq 0$, donde la función buscada $f(z)$ toma valores conjugados en puntos conjugados; y como se conocen los valores $u=U$ en el semi-eje $+y$, y los mismos en el $-y$, la fórmula clásica que resuelve el problema de Dirichlet en el semiplano da la solución buscada:

$$[1] \quad f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) \frac{tz+i}{t+iz} \frac{dt}{1+t^2}$$

integral que se reduce al intervalo $(0, \infty)$ agrupando los elementos simétricos, donde U tiene igual valor; pero esta reducción no ofrece ventaja.

Si $U(t)$ es continua, esta solución es única si se impone la condición de regularidad en todo el dominio, admitiendo discontinuidad en algún punto del contorno.

Como la diferencia de dos soluciones $u=u_1-u_2, v=v_1-v_2$ cumple la condición $u=0$ en $\alpha, v=0$ en β , el problema queda totalmente resuelto sumando a la solución dada por la fórmula anterior, la solución general de este segundo problema, que designaremos por $\omega(z)$.

Por ejemplo, el caso más sencillo del problema mixto, después de este caso homogéneo, es aquél en que se dan los valores constantes:

$$u = a \text{ en } \alpha, \quad v = b \text{ en } \beta$$

y la solución general es:

$$f(z) = a + bi + \omega(z)$$

Funciones regulares en el interior del cuadrante y continuas en el contorno, que cumplen la doble condición $u = 0$ en α , $v = 0$ en β , son, por ejemplo: $z, z^3, z^5, \dots, z \sqrt{1+z^4}, \dots$ y cualquier combinación lineal de ellas. La solución general $\omega(z)$ está dada por toda función que transforme los semiejes $+x, +y$ en conjuntos situados en los ejes x, y respectivamente, algunos de cuyos segmentos pueden estar recorridos cualquier número de veces en uno y otro sentido. Tales recintos se pueden formar conectando convenientemente hojas en cualquier número a lo largo de segmentos de los ejes x, y . La transformación conforme en semiplano se efectúa fácilmente mediante la fórmula de Schwarz-Christoffel, la cual resuelve el problema general.

También es inmediata la solución del problema I suponiendo que el recinto dado sea semi-circular. Si β es el diámetro, donde $v=0$, y α la semi-circunferencia superior, donde debe ser $u=U(t)$, la función buscada $w=f(z)$ transforma el semi-círculo en un recinto simple o múltiple, con un segmento rectilíneo de contorno en el eje x , homólogo del diámetro, por ser en éste $v=0$. Por el principio de simetría, al semi-círculo simétrico corresponde el recinto simétrico en la prolongación analítica; y como u toma valores iguales en puntos simétricos de ambas circunferencias la función queda determinada por la integral (*):

$$[2] \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(t) \frac{\tau+z}{\tau-z} dt \quad (\tau = e^{it})$$

Cualquiera que sea el recinto simplemente conexo de contorno $c = \alpha + \beta$, basta trasformarlo en cuadrante cartesiano o en semi-círculo, según sea más cómodo, y la solución que llamaremos inicial queda expresada por las fórmulas anteriores. Para formar las soluciones singulares será preferible la reducción a semiplano o cuadrante.

EJEMPLO 1: Problema mixto en el semiplano $y \geq 0$. Si en la semirrecta α ($x \leq 0$) se da U como valor de u , y en la β ($x \geq 0$) es $v = 0$, basta sustituir $\sqrt{z}$ en vez de z en la fórmula [1].

(*) Véase por ej. nuestro *Resumen de la Teoría de funciones analíticas y sus aplicaciones Físicas*. Buenos Aires, 1917, pág. 91.

EJEMPLO 2: Problema mixto en el círculo. En diversos problemas de Mecánica de Fluidos se presenta el problema mixto en que se da U en la semicircunferencia superior y $v = 0$ en la inferior. Basta sustituir en la fórmula [1] $\sqrt{i(1+z): (1-z)}$ en vez de z .

Si en vez de la semicircunferencia superior el arco α es el de amplitud $0 \leq t \leq \alpha$, la sustitución será $\sqrt{(z-q): (z-1)}/\sqrt{q}$, donde $q = e^{i\alpha}$.

EJEMPLO 3: En el problema del movimiento de un fluido perpendicularmente a una lámina $-1 \leq x < 1, y = 0$, se conoce una función en una cara y la conjugada en la otra. Basta efectuar en [1] la sustitución de z por $\sqrt{(1-z): (1+z)}$ y lo mismo en $\omega(z)$ para obtener las soluciones singulares.

NORMA GENERAL: Es inútil escribir desarrolladamente, como hacen los autores, las complicadas fórmulas que a veces producen las sustituciones; y la razón es obvia: actuando z como parámetro, sería absurdo arrastrar ese peso muerto en el cálculo de la integral, cuando éste pueda hacerse explícitamente por métodos elementales; y en el caso general en que tal no acontezca, su cálculo en cada punto z se hará por métodos numéricos o gráficos para el valor transformado de z , utilizando los dispositivos especiales ya existentes para las integrales de los tipos [1] y [2] por su extraordinaria importancia. En todo caso huelgan las imponentes fórmulas obtenidas por los autores con artificios innecesarios.

Método II. El problema mixto I aquí tratado es un caso particular del llamado «tercer problema de contorno». Basta observar que la condición $v = \text{const.}$ en el arco β equivale a la anulación de la derivada v_s , o sea $u_n = 0$.

Basta, pues, aplicar los métodos conocidos para este tercer problema de contorno, que no tienen ventaja sobre el arriba expuesto.

Método III. De las fórmulas usuales en la teoría del potencial se deduce inmediatamente la expresión:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[u \left(\frac{\cos rn}{r} + w_n \right) - u_n (w - lr) \right] ds,$$

siendo r la distancia al punto interior z desde el punto variable sobre el contorno y w una función armónica cualquiera. Elegida ésta de modo que en α valga lr , y en β sea $w_n = -(\cos rn):r$ resulta una fórmula muy simple, quedando reducido el problema a otro más sencillo, de solución inmediata en el círculo unidad.

Diversos problemas mixtos. Veamos cómo se resuelven fácilmente los diversos casos que pueden presentarse, según sea el dato conocido en cada uno de los arcos.

Datos: v y v_n . Como $v_n = u_s$, esto equivale a conocer v en un arco y por integración u en el otro, luego queda reducido al problema I.

Datos: u_s y v_s . Integrando, se conocen u y v en los respectivos arcos, luego también se reduce al problema I.

Datos: u_n y v_n . Estos equivale a conocer v_s y u_s , respectivamente, luego se pasa al caso anterior, y de éste al I.

Datos: u y u_n . Conocido $v_s = u_n$ se deduce v , luego se pasa al problema I.

Merece especial mención el caso $v=0$, $v_n = \text{const.}$ o sea: u función lineal de la longitud del arco, mientras v es nulo en el otro arco. La resolución es inmediata adoptando un recinto adecuado y reduciendo a él por transformación conforme cualquier otro.

Tales recintos sencillos son: la zona $0 \leq y \leq \pi$, en la cual la función $y - \pi$ cumple las condiciones impuestas, siendo ésta la única solución regular. O también se puede adoptar el primer octante formado por el semi-eje x , y la bisectriz del primer cuadrante, recinto en el cual la función $y - x$ se anula en dicha bisectriz, mientras vale 1 su derivada normal sobre el otro lado del ángulo.

Problema mixto lineal. Llamamos así al análogo al tratado en los cursos de Análisis, donde se consideran relaciones lineales entre los valores de la función u y de su derivada normal u_n . Mucho más sencillo es el problema siguiente, que se presenta en las aplicaciones, y parece no haber sido tratado: determinar las funciones conjugadas u y v en el recinto, conocida sobre el contorno una expresión lineal:

$$AU - BV = W$$

donde U y V son los valores de u y v en cada punto de c ; y A, B, W son funciones cualesquiera (en general discontinuas) sobre este contorno.

Para la resolución supongamos que las funciones armónicas a y b definidas por los valores de contorno A y B son conjugadas, pues basta dividir las en caso contrario por un factor conveniente, función del contorno. Resulta, pues, analítica

la función $\gamma(z) = a + ib$; y llamando $w(z)$ a la función analítica cuya parte real vale W en c , la función buscada es

$$f(z) = u + iv = w(z)/\gamma(z).$$

El cálculo de ese factor de homogeneidad equivale a determinar la función conocido su argumento, problema bien conocido, pero en los casos simples el factor salta a la vista.

EJEMPLO 1: En el cuadrante cartesiano sea α el semieje $+y$; β el semieje $+x$, y los coeficientes de la ecuación sean:

$$\text{en } \alpha : \quad A = 1, \quad B = 0, \quad W = U$$

$$\text{en } \beta : \quad A = 0, \quad B = 1, \quad W = 0$$

Basta dividir en α por y , en β por x , y resulta: $\gamma(z) = a + ib = i/z$. La función U/y determina su conjugada por una integral curvilínea y queda resuelto el problema. Por ejemplo, si $U = y$ resulta $w(z) = -\frac{2i}{\pi} \log z$, luego $f(z) = -\frac{2}{\pi} \log z$.

Este método para resolver el problema I, incluido en el problema lineal como caso más sencillo, puede convenir sobre los expuestos antes.

EJEMPLO 2: Sean los coeficientes siguientes sobre el contorno del primer octante:

$$\text{en } \alpha \ (y = x, \ x \geq 0) \quad A = 1, \quad B = 1, \quad W = 1 + 2x^2$$

$$\text{en } \beta \ (y = 0, \ x \geq 0) \quad A = 1, \quad B = 0, \quad W = 1 + x^2$$

Dividiendo en α por $2x$, en β por x , salta a la vista que $\gamma(z) = 1/z$. Después de esa división es:

$$W = x + \frac{1}{2x} \text{ en } \alpha, \quad W = x + \frac{1}{x} \text{ en } \beta,$$

luego W es la parte real de la función analítica $z + \frac{1}{z}$ y dividiendo por $\gamma(z)$ resulta $f(z) = 1 + z^2$.

NOTA. — Es obvio que la ecuación puede proponerse en la forma $AV + BU = W$ y entonces es W la componente imaginaria del producto $(A + iB)(U + iV)$ debiendo determinarse su parte real. Así, en el caso $W = 0$ el problema se reduce a determinar todas las funciones analíticas que son reales en el contorno, problema bien conocido; pero en los casos más sencillos no será preciso recurrir al método general.

Tal sucede, por ej., si los coeficientes A, B, W son constantes en cada arco, pues en el ángulo definido por las rectas que tienen estos coeficientes, la solución es $f(z) = z$, y cualquier otro recinto se transforma en él. Este sencillo método sirve también para el caso de tres arcos componentes del circuito, en cada uno de los cuales tienen los coeficientes valor constante; la generalización a cualquier número de arcos es un conocido problema algebraico.

DERIVACION E INTEGRACION DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL TOMADAS EN VALOR ABSOLUTO

(MANUSCRITOS POSTUMOS)

por ARTURO FRAILE

NOTA NECROLÓGICA. — Insertamos a continuación la nota redactada sobre la base de los originales incompletos dejados por el malogrado matemático español Arturo Fraile, muerto el 10 de Julio de 1943 pocos días antes de cumplir 28 años. A pesar de su modesta carrera de Perito industrial, y a pesar también de haber vivido siempre en León, ciudad alejada de todo movimiento científico, realizó en su efímera vida interesantes trabajos, uno de los cuales vió la luz en las páginas de esta revista; un trabajo póstumo titulado “Ampliación de la geometría analítica ordinaria” ha sido publicado en la Revista matemática Hispano-Americana; y el otro trabajo póstumo, piadosamente recopilado por su hermano de los papeles incompletos, es el que se inserta a continuación como sentido homenaje al malogrado joven que con muy escasos conocimientos matemáticos dió tan evidentes muestras de su talento.

1. Sea $f(x)$ una función no definida en el punto x_0 del intervalo $[a, b]$ y uniforme y derivable en todos los demás puntos de dicho intervalo. Sea

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_d \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_i.$$

Llamamos *valores virtuales* de la función $f(x)$ en el punto x_0 , para el cual no está definida, a los límites l_d y l_i .

Cuando la discontinuidad en x_0 es evitable ($l_d = l_i = l$), l es —ya lo sabemos— el *verdadero valor* de $f(x_0)$. Si es $l_d \neq l_i$, llamamos *derivada virtual a la derecha* en x_0 a la derivada a la derecha obtenida a partir del valor virtual $f(x_0) = l_d$; la representamos por $f'_d(x_0)$. Análogamente, *derivada virtual a la izquierda*, $f'_i(x_0)$ es la derivada a la izquierda obtenida a partir del valor virtual $f(x_0) = l_i$. Cuando es $f'_d(x_0) = f'_i(x_0) = \zeta$, *convenimos en atribuir a $f'(x)$ el valor ζ en x_0 y lo llamamos valor verdadero de $f'(x)$ en x_0 .*

He aquí una justificación de este convenio: Si es $f'(x)$ continua en $[a, b]$, excepto, claro es, en x_0 , los límites de $f'(x)$ en x_0 por ambos lados son iguales a ζ , y la discontinuidad es evitable en este punto.

2. Consideremos la función $y = \frac{|u|}{u}$ donde $u = \varphi(x)$ es uniforme y derivable. Esta función y no es, propiamente, $\text{sg } u$: pierde la identidad con ella en los ceros de u , en los cuales y no está definida ($y = \frac{0}{0}$) y $\text{sg } u = 0$. Ambas funciones tienen en las raíces de $u = 0$ puntos de discontinuidad de primera especie: por la derecha tienen límite $\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$, y por la izquierda $\begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$. Para todo x que no haga $u = 0$, las dos funciones y y $\text{sg } u$ valen 1 o -1 . Sus derivadas serán, pues, nulas para dichos valores de x . En los ceros de u , la función $\frac{|u|}{u}$ tiene iguales — nulas — las derivadas virtuales por la derecha y por la izquierda; con el convenio antes establecido, $\frac{|u|}{u}$ tiene derivada en las raíces de $u = 0$ y es también nula. La función $\text{sg } u$, en los ceros de u , tiene: las dos derivadas virtuales iguales (nulas), y derivadas infinitas a ambos lados si se toma como base el valor $\text{sg } 0 = 0$ que define a $\text{sg } u$ en las raíces de $u = 0$. Así, pues, a pesar de las discontinuidades que, en general, tiene $\frac{|u|}{u}$, esta función, en virtud del convenio establecido antes, tiene derivada nula para todo x .

La función $\frac{|u|}{u}$ se presenta, como veremos, de un modo natural al obtener la derivada y la integral de $|u|$; por otra parte, vemos su gran analogía con $\text{sg } u$, función ésta establecida «por enunciación». Nos parece, pues, más natural también llamar $\text{sg } u$ a $\frac{|u|}{u}$, lo cual haremos en lo sucesivo.

3. Resulta, pues, que no sólo las constantes tienen derivada nula, sino que también algunas funciones la tienen. Estas funcio-

nes son de tal naturaleza que, mientras la variable independiente recorre el campo real, ellas sólo toman los valores de un conjunto numerable; valores «separados» unos de otros por puntos de discontinuidad de primera especie, en los cuales no están definidas estas funciones. Así, por ejemplo, $k \frac{|u|}{u}$, $\sum_{i=1}^n k_i \frac{|u_i|}{u_i}$.

Geométricamente se llega también a este tipo de funciones: La derivada de una poligonal rectilínea uniforme ha de ser una función que vaya tomando los valores de los coeficientes angulares. Problema éste resuelto ya ahora analíticamente: Una poligonal uniforme rectilínea tiene su ecuación del tipo (*)

$$y = \sum_{i=1}^n k_i |x - x_i| + mx + q,$$

y su derivada es, como veremos,

$$y' = \sum_{i=1}^n k_i \frac{|x - x_i|}{x - x_i} + m.$$

Con la existencia de estas funciones y la posibilidad de su manejo algébrico se desprende inmediatamente esta conclusión:

«Las funciones primitivas de una dada se diferencian en una constante o en una función $\sum_{i=1}^n k_i \frac{|u_i|}{u_i}$ ».

Sea $F(x)$ función primitiva de $f(x)$. Podemos, por lo tanto, escribir:

$$\int f(x) dx = F(x) + k \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)},$$

donde $\varphi(x)$ es uniforme y derivable. Si x_0 es una raíz de $\varphi(x) = 0$, en este punto la función primitiva $F(x) + k \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}$, no está definida. Supongamos que en un semientorno a la derecha de x_0 es $\varphi(x)$ positiva, y creciente en x_0 ; y sea $F(x_0) = \alpha$. Será

(*) Ver ARTURO FRAILE, *Ampliación de la Geometría Analítica ordinaria*, Revista Matemática Hispano-Americana, 1943.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[F(x) + k \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} \right] = \alpha - k,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[F(x) + k \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)} \right] = \alpha + k.$$

La función primitiva $F(x) + k \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}$ tiene, pues, en x_0 un punto de discontinuidad de primera especie de oscilación $2k$.

Si $f(x)$ es integrable, podemos obtener una función primitiva de $f(x)$ que tenga discontinuidades de primera especie en los puntos que deseemos y con las oscilaciones que queramos. Si las discontinuidades han de presentarse en los puntos x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y queremos que las oscilaciones respectivas sean $2k_i$, la función primitiva será

$$F(x) + \sum_1^n k_i \frac{|x - x_i|}{x - x_i},$$

siendo $F'(x) = f(x)$. Para que las oscilaciones en los x_i valgan todas $2k$ basta escribir: $F(x) + k \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}$ donde $\varphi(x)$ sea una función tal que tenga los n ceros x_i .

4. Sea $y = |u|$ ($u = f(x)$ derivable). Poniendo $y = \frac{|u|}{u} \cdot u$, y teniendo en cuenta que $\frac{|u|}{u}$ tiene derivada nula para todo x , es: $y' = u' \frac{|u|}{u}$. Así, pues: «La derivada de una función tomada en valor absoluto es igual a la derivada de la función submodular por la función signo de esta última».

A esto mismo se llega por más riguroso procedimiento. Para un incremento, Δx , el cociente incremental es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|u + \Delta u| - |u|}{\Delta x}.$$

Multiplicando numerador y denominador por $|u + \Delta u| + |u|$ resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta u)^2 - u^2}{\Delta x[|u+\Delta u| + |u|]} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{2u+\Delta u}{|u+\Delta u| + |u|};$$

y, tomando límites, $y' = u' \cdot \frac{2u}{2|u|} = u' \frac{u}{|u|}$; o bien:

$$y' = u' \frac{|u|}{u}.$$

Podemos escribir la derivada así: $y' = |u| \frac{u'}{u}$, o sea: «La derivada de una función tomada en valor absoluto es igual a dicha función absoluta por la derivada de su logaritmo natural».

Se demuestra:

1º. $d(\sum_1^n w_i) = \sum_1^n dw_i$, sean o no absolutas w_i .

2º. Se conserva la regla de derivación del producto de funciones ordinarias para $|u|, v$, y $|u| \cdot |v|$. Así, pues, también es posible la integración por partes.

3º. Se conserva la regla de derivación del cociente para $\frac{u}{|v|}$ y $\frac{|u|}{|v|}$.

4º. Función: $|u|^m$. Derivada: $m|u|^{m-1} u' \frac{|u|}{u}$.

» $a^{|u|}$. » $a^{|u|} \cdot u' \cdot \text{sg } u \cdot La$.

5. Como es $\int |u| dx = \int \frac{|u|}{u} u dx$, y $\frac{|u|}{u}$, por tener derivada nula, puede salir fuera del signo integral, será:

$$\int |u| dx = \frac{|u|}{u} \int u dx.$$

Es decir: «La integral de una función tomada en valor absoluto es igual a su función signo por la integral ordinaria».

A este mismo resultado conduce la integración por partes.

Obsérvese que, aun suponiendo constante el sumando de integración de $\int u dx$, el de $\int |u| dx$ es una función signo.

6. Tanto la derivada como la integral de una función absoluta nos han conducido a funciones de la forma $\frac{|u|}{u} \cdot v$; por ello se hace necesario el estudio de estas últimas.

Sean u y v funciones continuas y uniformes de x , y $a_1, a_2, \dots, a_n$ los ceros de u . Si ningún a_i es cero de v y u es creciente o decreciente en los a_i , la función $y = \frac{|u|}{u} \cdot v$ tiene un punto de discontinuidad finita de primera especie en cada uno de los puntos de abscisa a_i , pues si es $\lim_{x \rightarrow a_i} v = a$ y u creciente en a_i , es $\lim_{x \rightarrow a_i^-} \frac{|u|}{u} \cdot v = +a$ y $\lim_{x \rightarrow a_i^+} \frac{|u|}{u} \cdot v = -a$ (si u es decreciente en a_i cambian los signos de los segundos miembros). En ambos casos la oscilación en a_i es $2a$.

Si un cero a_k de u lo es a la vez de v , como es $\lim_{x \rightarrow a_k} v = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a_k} \frac{|u|}{u} = \pm 1$, la oscilación de y en a_k es nula, y, por lo tanto, y es continua en $x = a_k$.

Cuando u alcanza un máximo o un mínimo en a_i , los límites de $\frac{|u|}{u}$ en a_i a la derecha y a la izquierda son del mismo signo y de valor absoluto 1; luego la oscilación en a_i es cero, y, por lo tanto, es y continua en a_i .

Resumiendo: Si u y v son continuas y uniformes, $\frac{|u|}{u} v$ también lo es, excepto en los ceros de u en los cuales u no alcance máximo ni mínimo y ninguno de estos ceros lo sea de v .

7. Si es u lineal tenemos:

$$\int |u| dx = \frac{|u|}{u} \frac{1}{u'} \int u du = \frac{1}{2u'} |u| \cdot u + \mu \frac{|u|}{u},$$

donde μ es constante o es otra función signo; ésta puede ser $\mu = k \frac{|u|}{u}$, en cuyo caso queda

$$\frac{1}{2u'} |u| u + k \equiv \frac{1}{2a} |ax + b| (ax + b) + k,$$

continua para todo x .

Si μ es una constante C ,

$$\int |ax + b| dx = \frac{|ax+b|}{ax+b} \left(\frac{a}{2} x^2 + bx + C \right) \quad [1]$$

Según hemos visto, en este caso, sólo cuando la raíz $-\frac{b}{a}$ lo sea también de $\frac{a}{2} x^2 + bx + C$ habrá continuidad en $-\frac{b}{a}$; para ello, $C = \frac{b^2}{2a}$, y queda, en efecto, $\frac{1}{2a} |ax + b|(ax + b)$.

Si es $C \neq \frac{b^2}{2a}$, [1] es discontinua en $-\frac{b}{a}$ y la oscilación vale $2C - \frac{b^2}{a}$.

Comparemos

$$\int |u| dx = \frac{1}{2u'} |u| u + C \quad [2]$$

(u lineal, C constante) con la parábola ordinaria

$$\int u dx = \frac{1}{2u'} u^2 + C \quad [3],$$

que alcanza su máximo, o su mínimo, en el punto (p, C) , siendo p la raíz de $u=0$. Cuando es $u \geq 0$, [2] y [3] coinciden. Si es $u < 0$ es $\int u dx = k + C$ y $\int |u| dx = -k + C$; luego [2] y [3] son simétricas respecto de la recta $y=C$, tangente en el vértice a la parábola [3]. Por lo tanto, la curva integral [2] es la obtenida de una parábola ordinaria $\frac{1}{2u'} u^2 + C$ substituyendo una

de sus ramas por su simétrica respecto de la tangente en el vértice. La línea así obtenida carece de ecuación ordinaria; pero ya vemos que tiene su ecuación [2] con formas absolutas. En vista de esto, las líneas de esta clase ¿pueden ser consideradas como curvas *en sí* sin atender a su obtención de otras conocidas? En tal caso, la [2] sería de tercer orden, a pesar del grado de [2],

con su punto de inflexión en (p, C) ; es continua en todo el campo real, y uniforme, y es la integral del contorno angular $|u|$; y puede ser prevista con sólo atender a la gráfica de $|u|$ considerando la gráfica de su primitiva.

8. *Algunas integrales.* a) Sean dos funciones, $y=|u|$, $t=L|u|$, donde u es uniforme y derivable. Se tiene sucesivamente:

$$dy = |u| \frac{du}{u}; \quad dt = \frac{du}{u};$$

$$|u| \cdot L|u| = \int |u| \frac{du}{u} + \int (L|u|) \cdot |u| \frac{du}{u} = |u| \int (L|u|^{u|}) \frac{du}{u};$$

$$\int (L|u|^{u|}) \frac{du}{u} = |u| \cdot L|u| - |u| + \mu = L \left| \frac{u}{e} \right|^{u|} + \mu.$$

Si suprimimos las barras a u tanto en la expresión subintegral como en el segundo miembro queda

$$\int Lu \cdot du = L \left(\frac{u}{e} \right)^u + \mu,$$

igualdad que es cierta.

b) La derivada de $y=e^{|x|}$ es $y' = \frac{|x|}{x} e^{|x|}$;

luego

$$\int e^{|x|} dx = e^{|x|} \frac{x}{|x|} + \mu = \frac{|x|}{x} \cdot e^{|x|} + \mu.$$

c) *Integral de un producto* $|u| \cdot v$. Es:

$$\int |u|v \, dx = \int \frac{|u|}{u} uv \, dx = \frac{|u|}{u} \int uv \, dx.$$

9. (*) *Ecuación diferencial con coeficientes absolutos.*

$$y' + |\varphi_1(x)|y = |\varphi_2(x)|.$$

Haciendo lo clásico $y = uv$ es:

$$u[v' + |\varphi_1(x)|v] + u' \cdot v = |\varphi_2(x)|; \quad v' + |\varphi_1(x)|v = 0;$$

$$\frac{v'}{v} = -|\varphi_1(x)|; \quad L|v| = \int -|\varphi_1(x)|dx = \frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)} \int -\varphi_1(x)dx;$$

$$v = e^{-\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)} \int \varphi_1(x)dx} \quad . \quad \text{Entonces, } u'v = |\varphi_2(x)|;$$

$$\frac{du}{dx} = |\varphi_2(x)| e^{\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)} \int \varphi_1(x)dx}; \quad \text{integrando,}$$

$$u = \int |\varphi_2(x)| e^{\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)} \int \varphi_1(x)dx} dx.$$

$$y = v \cdot u = e^{-\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)} \int \varphi_1(x)dx} \left[\int |\varphi_2(x)| e^{\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)} \int \varphi_1(x)dx} dx + \mu \right].$$

Y teniendo en cuenta (n. 8, c) que es:

$$\int |u| \cdot v dx = \frac{|u|}{u} \int uv dx$$

queda:

$$y = e^{-\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)} \int \varphi_1(x)dx} \left[\frac{|\varphi_2(x)|}{\varphi_2(x)} \int e^{\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)} \int \varphi_1(x)dx} \cdot \varphi_2(x)dx + \mu \right]$$

El sumando μ puede ser una función signo. Esta solución se diferencia de la ordinaria en el factor $\frac{|\varphi_2(x)|}{\varphi_2(x)}$ y en la sustitución de e por $e^{\frac{|\varphi_1(x)|}{\varphi_1(x)}}$.

(*) Todo este n.º 9 está tomado fielmente por su hermano de lo que el autor dejó incompleto anotado en un papel.

BIBLIOGRAFIA

BEPPO LEVI. *Sistemas de ecuaciones analíticas en términos finitos, diferenciales y en derivadas parciales*. Monografías publicadas por la Facultad de Ciencias Matemáticas, Físico-químicas y Naturales de la Universidad Nacional del Litoral; N° I. — Rosario, 1944.

La Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral edita una nueva serie de publicaciones tituladas "Monografías", cuyo primer volumen lo constituye el trabajo del director del Instituto de Matemática, Dr. Beppo Levi, que en esta nota comentamos.

La autoridad mundialmente reconocida de su autor y el alto valor científico del libro, particularmente destacable entre las publicaciones especializadas en lengua castellana, ponen de relieve una vez más la labor meritísima que viene realizando entre nosotros el Instituto de Matemática de Rosario. A las numerosas publicaciones de dicho Instituto, que han merecido siempre una detenida atención por parte de las mejores revistas de recensión que en el mundo se publican, viene a agregarse esta monografía que une a una exposición nueva y muy provechosa de un asunto importante y fundamental de la Matemática y sus aplicaciones, el aporte original con que su ilustre autor aumenta su vasta labor de investigación científica.

Hay, pues, que felicitar calurosamente a las autoridades que han regido y rigen la Universidad Nacional del Litoral, por haber creado y mantenido, cada vez con mayor aliento, un Instituto de investigación científica, cuya fecunda labor da al país un prestigio bien merecido y promete para un futuro cercano frutos acaso insospechados.

El libro que nos ocupa está dirigido principalmente a tratar con carácter general los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, restringiendo el estudio al caso de las funciones analíticas. Esta limitación logra dar a la exposición la unidad y armonía propia de toda teoría referente a dichas funciones, las que si bien requieren el campo complejo para su estudio, dan lugar precisamente en él, a proposiciones tan claras, comprensivas y perfectas, que aun para el caso de su aplicación exclusiva al campo real y también como guía para ulteriores estudios en dicho campo, se revelan particularmente útiles.

Por otra parte, la exigencia de que toda función sea expresable mediante una serie de Taylor permite, en las aplicaciones prácticas de la teoría, alcanzar la solución por el procedimiento constructivo de aproximación que toda serie expresa.

El rigor expositivo con que el libro se desarrolla es algo plenamente logrado, lo que es interesante señalar dados los muchos puntos oscuros que aún existen en la teoría. Para alcanzar ese rigor se hace necesario empezar con el estudio de los sistemas de ecuaciones analíticas en términos finitos y en derivadas ordinarias, aunque limitando dicho estudio a tratar los resul-

tados generales más importantes, así como los métodos que más tarde se desarrollarán en lo que constituye la principal finalidad de la obra.

Esta puede por consiguiente ser leída sin muchos conocimientos previos, aun cuando no sea apropiada para tomarla como texto de *iniciación* en un primer estudio de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. En efecto, el autor enuncia siempre los teoremas en los términos más generales posibles, lo que si bien da a la obra un alto valor científico, requiere para ser bien comprendida que la mente ya esté acostumbrada al tipo de cuestiones a que se refiere. Por otra parte es conveniente poseer previamente la visión *sintética* e intuitiva del problema con sus interpretaciones geométricas en el espacio tridimensional y que el autor omite por encontrarse ya ampliamente desarrollada en los textos clásicos de estudio.

El Capítulo I trata sobre números complejos y funciones analíticas. Después de introducir en forma breve el número complejo y sus operaciones algebraicas, se estudia la serie de Taylor de una y varias variables, el teorema de Cauchy-Hadamard en ambos casos, la prolongación analítica y en ella el principio de permanencia de las relaciones analíticas; se llega así por el método de Weierstrass al concepto de función analítica en el caso de varias variables, particularmente interesante por qué la generalidad de los estudiosos se limita a conocer bien el caso de una sola variable.

Se deducen las propiedades fundamentales de dichas funciones y aun cuando sea el desarrollo de Taylor el que será utilizado sistemáticamente en los capítulos siguientes, se da el concepto geométrico de función analítica introducido por Cauchy con muy sabrosos comentarios sobre las condiciones de monogeneidad de Cauchy-Riemann (ya conocidas por D'Alembert y Euler), al dar una visión *sintética* sumamente instructiva de las diferentes líneas de pensamiento que principalmente Goursat por un lado y Menchoff por otro han seguido para profundizar la cuestión. Con ello se presenta la fórmula de la integral de Cauchy en una y varias variables como fórmula fundamental de la teoría de las funciones analíticas, la que una vez introducida la derivada logarítmica y el teorema de residuos, sirve para demostrar el clásico teorema preparatorio de Weierstrass, fundamento de la teoría de ecuaciones analíticas desarrollada en el capítulo II. Dicho teorema está también constructivamente tratado en forma que dé un procedimiento efectivo para la separación del factor algebroides, cuyo comportamiento es el de la función analítica en el entorno de uno de sus ceros. El capítulo acaba con las principales consecuencias de este teorema, entre las que se destaca el concepto de función reducida.

El Capítulo II está destinado al estudio de las ecuaciones analíticas en términos finitos y a los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias analíticas.

Poniendo en evidencia la necesidad de conocer previamente una solución numérica, se aplica el teorema preparatorio de Weierstrass a la resolución de una ecuación analítica y se estudia también la condición necesaria y suficiente para que aquella solución numérica sea punto singular de las eventuales soluciones de la ecuación.

Dichas conclusiones se extienden al caso de un sistema de ecuaciones

analíticas del cual se conozca una determinada solución numérica a ; la resolución de dicho sistema se reduce al de sus factores algebroides para aplicar a éstos la teoría de la resultante y obtener el que Osgood llama segundo teorema de Weierstrass.

El autor, como de costumbre, no se contenta con exponer el teorema existencial de las soluciones, sino que se preocupa de dar el método para construirlas efectivamente y poner de manifiesto la finitud del procedimiento y el papel que juega la característica del jacobiano del sistema, tanto en un punto genérico como en el punto a , a fin de resolverlo respecto a un grupo conveniente de variables.

Para la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, siempre reducible a los de primer orden aumentando adecuadamente las variables funciones, se despejan las derivadas que sea posible mediante la cadena finita de resultantes y eliminaciones anteriormente vista, para así obtener la forma normal en que el sistema está resuelto respecto a las derivadas y consta de tantas ecuaciones como funciones incógnitas. Ello da valor a la primera parte del capítulo para mostrar cómo y cuándo puede obtenerse dicha forma normal a partir del sistema dado.

De la forma normal se deducen fácilmente por derivaciones sucesivas los coeficientes de las series de Taylor correspondientes a las funciones incógnitas, series cuya convergencia se asegura mediante el clásico método de Cauchy de las series mayorantes. Con ello queda resuelto el problema de Cauchy, es decir el hallar dichas soluciones una vez que para un valor determinado de la variable independiente se supone que las funciones incógnitas toman valores iniciales asignados.

Los principales resultados del capítulo quedan aclarados mediante ejemplos ilustrativos muy bien elegidos.

El Capítulo III trata de dos lemas algebraicos, el segundo de los cuales no sólo tiene importancia teórica, sino también práctica y es fundamental para la posterior construcción efectiva de la solución formal de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. En efecto, a toda derivada de una función de varias variables puede hacerse corresponder el monomio entero que figura como índice inferior en la notación de dicha derivada.

Con ello las derivadas que nacen de una dada por sucesivas operaciones de derivación son precisamente las que corresponden a los monomios múltiplos del monomio correspondiente a la derivada inicial. Es problema fundamental de la teoría de los sistemas completos de ecuaciones en derivadas parciales, sistemas en los que figuran despejadas en los primeros miembros sendas derivadas llamadas principales, la determinación de las llamadas derivadas paramétricas, no deducibles por derivación sucesiva de las principales: son aquellas cuyos monomios correspondientes no son múltiplos de ninguno de los monomios que forman el grupo M correspondiente a dichos primeros miembros. Entonces las condiciones iniciales del sistema dependen de la manera como se distribuyen dichos monomios no múltiplos según el lema siguiente: Dado un sistema finito M de monomios de k variables $x_1, x_2, \dots, x_k$ tales que de cada dos de ellos nunca uno sea múltiplo del otro, se puede entonces determinar (generalmente de varios modos en número finito) otro sistema N de monomios

y correspondientemente a cada uno de éstos un grupo de variables (llamadas multiplicatrices), en forma tal que todos los monomios que no son múltiplos de ninguno de M y sólo ellos, se obtienen una y una sola vez por multiplicación de un monomio de N por un monomio adecuadamente formado con las correspondientes variables multiplicatrices.

Las palabras subrayadas equivalen a decir que ningún monomio de M podrá obtenerse así y esta observación esencial constituye un olvido importante del autor.

El Capítulo IV trata de la resolución formal de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales y la manera de completarlos. El capítulo comienza con la observación de que por introducción de nuevas ecuaciones y nuevas variables independientes, siempre es posible suponer que la función incógnita es única, al considerarla como combinación lineal de las que figuren en el problema. Se pone de relieve la importancia del teorema sobre conmutabilidad del orden de las derivaciones para que se presente en estos sistemas la posibilidad de su incompatibilidad y se empieza con el ejemplo más simple proporcionado por las condiciones de integrabilidad de una diferencial total.

El primer sistema que se estudia es el de k ecuaciones de primer orden con una sola función incógnita y n variables independientes; la condición de conmutabilidad en la derivación se aplica a obtener las consecuencias diferenciales del sistema dado, formuladas mediante los clásicos paréntesis y corchetes de Poisson como nuevas ecuaciones también de primer orden, funcionalmente independientes de las anteriores para así llegar a un sistema completo o en involución, si antes el sistema no se ha demostrado incompatible o se ha encontrado directamente una solución. Si h es el número de las ecuaciones independientes de uno de estos sistemas completos, supuestas despejadas h de las n derivadas parciales primeras, la construcción formal de la solución, es decir la obtención de un desarrollo de Taylor que verifique formalmente las ecuaciones propuestas se efectúa término a término por derivación sucesiva de aquellas h derivadas despejadas y aplicación de valores iniciales. Así una solución del sistema dado queda unívocamente determinada como función analítica de todas las variables, en cuanto se asigne arbitrariamente la función analítica de $n-h$ variables a la cual se reduce la solución buscada sobre una determinada variedad analítica de dimensión $n-h$ (condiciones de Cauchy).

Sin entrar en otros procedimientos clásicos de resolución que se encuentran en tratados bien conocidos y después de aclarar los puntos anteriores con adecuados ejemplos, el autor considera los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de orden cualquiera, poniendo de relieve el hecho nuevo y muy importante de que la aparición y número de nuevas consecuencias diferenciales del sistema dado depende ahora esencialmente de la ordenación de las derivadas, es decir de la determinación de una altura para ellas. Así se distinguen dichas ordenaciones en normales, casi normales y no-normales; las primeras son aquellas en que se tiene en cuenta 1º) el orden de derivación, 2º) el primer orden de derivación diferente que afecta a las variables colocadas en sucesión determinada en la comparación de dos derivadas del mismo orden.

Si sólo se cumple la primera condición, se tiene una ordenación casi

normal; dando un peso o cota a cada variable (v. g. números primos distintos) pueden obtenerse mediante pesos totales crecientes, ordenaciones no-normales en altura de las derivadas. En el caso de varias funciones incógnitas, por la reducción dicha a una función incógnita, se determinaría también una ordenación en altura de las derivadas, aun cuando pueda hacerse directamente, sin más que tener en cuenta entre las dos condiciones anteriores, el índice de la función.

Dado ahora un sistema de ecuaciones analíticas en derivadas parciales y fijada arbitrariamente una ordenación en altura de las derivadas, puede considerarse cada ecuación resuelta respecto a la derivada de máxima altura que ella contiene. Aparecerán así, después de fáciles simplificaciones, como primeros miembros las primeras derivadas principales que encontremos. Por la conmutabilidad del orden de derivación, se deducirán acaso nuevas consecuencias diferenciales, que habrá que agregar al sistema, las que serán algebraicamente independientes de éste; despejando las respectivas derivadas de máxima altura y así siguiendo, el primer lema del capítulo III (es finita toda sucesión de monomios de k variables en que ninguno es múltiplo del anterior) asegura que después de un número finito de pasos, se llega siempre a un sistema que también se puede llamar completo, por no deducirse de él nuevas consecuencias diferenciales. Obsérvese que en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias la finitud del sistema normal se obtenía por el hecho de que el número de ecuaciones había de ser igual al de funciones que quedaban como incógnitas; en el caso de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden con una función incógnita, el número final de ecuaciones no podrá sobrepasar al de derivadas primeras, es decir al de variables independientes; aquí es el primer lema algebraico citado el que nos asegura la finitud del sistema completo.

Se concluye así, que un sistema dado de ecuaciones analíticas en derivadas parciales equivale al conjunto de uno o más (en número finito) sistemas completos dependientes de una determinada ordenación de las derivadas en altura, sistemas completos que se separan de él mediante una sucesión finita y determinada de operaciones consistentes en derivaciones, eliminaciones y determinación de soluciones numéricas de sistemas analíticos en términos finitos.

Fijado ya un determinado sistema completo con respecto a una determinada ordenación en altura de las derivadas, se extiende el nombre de derivadas principales a todas las que se deducen de los primeros miembros por derivación sucesiva; todas las demás se llaman paramétricas.

El lema II del capítulo III permite ahora construir formalmente la serie de Taylor que da la solución, definida siempre que se fijen apropiadas condiciones iniciales para las derivadas paramétricas, condiciones que dependerán de los distintos sistemas N que se puedan construir en el lema, apareciendo como funciones arbitrarias o reduciéndose a constantes también arbitrarias, según haya o no variables multiplicatrices en correspondencia al monomio respectivo. En definitiva, para completar la determinación de una función incógnita de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, hay que dar condiciones iniciales que se traducen en asignar los valores de funciones (even-

tualmente constantes) a las que se reducen determinadas derivadas de la función incógnita (eventualmente la función misma) sobre determinadas variedades de puntos del espacio representativo del sistema de las variables. Las condiciones iniciales se llaman *de Cauchy* cuando se refieren a los valores dados sobre una misma variedad. Aquí, ni la estructura de las variedades (que pueden no ser lineales) ni su dimensión, es algo intrínseco al sistema, sino que dependen no tan sólo de la ordenación de las derivadas en altura, sino también del sistema N que se haya construido en el lema II ya citado.

Antes de referirme a los ejemplos y teoremas complementarios con que se acaba el capítulo, diremos que toda esta exposición de gran belleza intrínseca con que el autor desarrolla la teoría, distingue especialmente la obra que comentamos de las otras que se refieren al mismo tema, aun cuando no se incluyan otros métodos clásicos de resolución como aquel que refiere todo sistema a otro de primer orden, lineal en las derivadas, pero con diversas funciones incógnitas, parte de las cuales se han introducido en la transformación; dicho sistema lineal, puesto en la forma llamada canónica se resuelve también por la consideración de derivadas principales y paramétricas.

Los ejemplos elegidos por el autor para aclarar la teoría por él desarrollada, son muy reveladores y aun interesantes por sus aplicaciones prácticas. En particular se estudian los sistemas de dos ecuaciones en derivadas parciales para una función de dos variables, cuando una de las ecuaciones es de segundo orden, introduciendo los conceptos de integral intermedia, es decir de una ecuación de orden menor todas cuyas soluciones verifiquen el sistema, y de los sistemas que Sophus Lie llamó en involución.

Después de dar ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones con varias funciones incógnitas, se consideran también los sistemas llamados de Sofía Kowalewski, sobre todo por su importancia histórica (primer estudio de carácter general de los sistemas en derivadas parciales), ya que aquí resultan un caso muy particular y sencillo en que el problema de Cauchy admite siempre solución.

Otros ejemplos revelan la importancia de la elección de la ordenación en altura y consecuentemente de las derivadas principales en el cálculo y naturaleza de una solución y cómo aun en el caso de una sola ecuación, si se dejan de lado condiciones de privilegio que la ecuación misma impone a las derivadas, tiene que renunciarse a considerarla ella sola un sistema completo, por lo menos como hecho general sin excepciones.

Se hace notar también mediante los ejemplos expuestos que así como en los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias se da particular importancia al número finito de constantes arbitrarias de que depende su integración y por consiguiente las condiciones iniciales que puedan fijarse, en cambio en el problema de la determinación de las condiciones iniciales para individualizar la solución de un sistema en derivadas parciales, condiciones representadas generalmente por funciones arbitrarias, pueden variar según el procedimiento de resolución que se adopte el número de estas condiciones y el número de variables de que dependen las funciones que las representan. Por lo tanto el número de las funciones arbitrarias que completan la defini-

ción de un problema en derivadas parciales debe considerarse estrechamente vinculado al *significado* que estas funciones van a tener.

Sin embargo, en este orden de ideas, se acaba el capítulo mediante un notable teorema de Riquier que se refiere a los procedimientos de resolución que realizan la llamada propiedad K , es decir aquella por la que en el cálculo de los coeficientes del desarrollo de Taylor de la solución, la determinación de todos los coeficientes de los términos de grado $\leq k$ se hace antes que, e independientemente de, la determinación de cualquier término de orden $\vee k$.

El Capítulo V se dedica al estudio de la convergencia de las soluciones formales construidas según los procedimientos del capítulo anterior. Es a nuestro juicio la parte de la obra que tiene mayor valor científico, no tan sólo por la obtención de interesantes resultados nuevos que se añaden a los anteriormente hallados por Kowalewski, Meray y Riquier, sino también por abrir anchos horizontes de investigación fructuosa a los estudiosos que deseen adentrarse en esta teoría.

Ante todo es conveniente advertir que el autor llama *ilimitadamente integrable* a un sistema diferencial de determinada forma de resolución si se puede establecer la convergencia de la solución formal en un campo suficientemente restringido para valores cualesquiera de los coeficientes que la forma de resolución deja indeterminados, siempre que aseguren la existencia de condiciones iniciales; mientras que llama al sistema *integrable limitadamente* si para realizar la convergencia de la solución, es necesario que esos coeficientes, a más de asegurar la existencia de las condiciones iniciales, verifiquen otras determinadas condiciones (que han de venir forzosamente expresadas por desigualdades).

Se demuestra que el sistema es siempre *ilimitadamente integrable*, si ha sido obtenido determinando las derivadas principales y paramétricas mediante una ordenación en altura normal.

Se demuestra que el sistema es siempre *ilimitadamente integrable*, si ha sido maltes y no-normales *ilimitadamente integrables*, pero como introducción al estudio de otros ejemplos de sistemas sólo *integrables limitadamente*, el autor da dos interesantes teoremas referentes a ordenaciones casi normales y que pueden considerarse como iniciales de una teoría general que queda por hacer.

El autor da en esos teoremas condiciones que hacen *ilimitadamente integrables* determinados tipos de ecuaciones, pero al mismo tiempo hace ver que esos tipos son en otras condiciones sólo *limitadamente integrables*, considerando el ejemplo clásico de la ecuación lineal de segundo orden de tipo elíptico, es decir, la ecuación de Laplace.

El estudio directo de esta última ecuación conjuntamente con la transformación efectuada para obtenerla del tipo general, da los casos en que ésta es sólo *limitadamente integrable*; entonces las funciones arbitrarias que fijan las condiciones iniciales vienen expresadas por series de Taylor cuyos coeficientes no pueden darse arbitrariamente dentro de la condición de convergencia de dichas series, sino que a más han de cumplir condiciones restrictivas dadas por acotaciones respecto a su modo de crecimiento, a fin de que la solución formal obtenida tenga un radio de convergencia no nulo.

Una bonita interpretación teórico-funcional que da el autor de parte de

esta investigación es la siguiente: una función armónica que sobre los lados de un ángulo se reduce a dos funciones analíticas (reales) arbitrarias es necesariamente prolongable o no en el entorno del vértice según que el valor del ángulo en grados sexagesimales sea un número algebraico irracional o un número racional; si el valor del ángulo es irracional trascendente podrá o no ser prolongable, dándose uno y otro caso para conjuntos densos de valores trascendentes del ángulo.

Finalmente el capítulo acaba estudiando un ejemplo de ordenación no-normal proporcionado por la ecuación del calor, llegándose a un resultado clásico sugerido por S. Kowalewski.

Bajo el título de "Consideraciones finales" el autor trata la noción de característica haciendo ver que solamente las llamadas variedades características, que son en cierta manera excepcionales, son las que no convienen para condiciones de Cauchy. Halla la ecuación diferencial de las características y observa que el estudio de las eventualidades que pueden presentarse está todavía en gran parte por hacer.

La obra acaba con una nota bibliográfica muy útil, dando cuenta de las diversas orientaciones según las que diversos tratados y memorias fundamentales consideran las materias contenidas en el libro. A este respecto, debemos alabar calurosamente la tendencia de dar sólo bibliografía en esta forma crítica, ya que una seca lista de obras y memorias, puesta al final de un libro, resulta en general, cuánto más larga, más inútil.

Quisiéramos añadir a la información bibliográfica, por considerarla didácticamente muy valiosa, la obrita, también de carácter general, de G. Hoheisel: "Partielle Differentialgleichungen" aparecida en los "Sammlung Götschen" de W. de Gruyter (Berlín, 1928), segunda parte de la ya no tan notable "Gewöhnliche Differentialgleichungen" del mismo autor (Berlín, 1926). Dicha obrita, que pertenece a la colección en que se publicó la tan reputada entre nosotros "Teoría de funciones" de K. Knopp (traducida por Labor) da a nuestro juicio en forma tan feliz como en esta última obra, una visión general y razonada del tema; en él quedan incluidas las transformaciones de contacto y su aplicación a la resolución de ecuaciones y sistemas con una o más funciones incógnitas.

La obra del Dr. Beppo Levi está a más enriquecida con ejemplos aclaratorios, muchos de los cuales, por su aplicación a la elasticidad y a la geometría, muestran el interés que la lectura de este libro ha de tener incluso para los que se interesan primordialmente en las aplicaciones de la Matemática. Sin embargo, tanto esta obra como las citadas en su nota bibliográfica final tienen una orientación netamente matemática por la manera de circunscribir y agotar el tema.

La impresión y presentación del libro es muy buena, habiendo conseguido la imprenta de la Universidad Nacional del Litoral superar todas las dificultades de composición.

San Juan, mayo de 1944.

Pedro Pi Calleja