Volumen X Número 5

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(Miembro del patronato de la Mathematical Reviews)

ORGANO DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

REDACTADA por

J. Babini (Director), J. Rey Pastor, L. A. Santaló y E. Gaviola (Delegado de la A. F. A.)

□

□

BUENOS AIRES
1945

SUMARIO

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPAÑÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G. BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUITARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — CARLOS ISELLA (Rosario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

INFORMES Y COMUNICACIONES DE LA TERCERA REUNION DEL NUCLEO DE FISICA

La Plata, Instituto de Física, Agosto de 1944

Preside: Dr. Héctor Isnardi

SESION DEL 29 DE AGOSTO

Informes:

E. Loedel Palumbo (La Plata). *La Temperatura, el Tiempo y las Magnitudes Físicas.*

Como es sabido algunos autores sostienen que la temperatura no es una magnitud física. Entre nosotros, el representante más conspicuo de esa tendencia es el profesor Dr. Teófilo Isnardi.

En un trabajo reciente (*) tuve oportunidad de analizar detalladamente los argumentos que se pretenden hacer valer para negar a la temperatura el carácter de magnitud física. Creo haber demostrado que esos argumentos son del todo inconsistentes. En este trabajo sostendré la siguiente tesis: *Cualquier argumento que se pretenda hacer valer para negar a la temperatura el carácter de magnitud, es aplicable también al tiempo.*

Si se me permite emplear términos jurídicos diría: temperatura y tiempo tienen exactamente el mismo derecho de ser considerados magnitudes físicas.

Hablamos siempre de «la temperatura», así, en singular, tanto que nos refiramos a las indicaciones de un termómetro de mercurio o a otro de alcohol, o a otro de hidrógeno o al parámetro T que figura en las ecuaciones de la termodinámica.

(*) E. Loedel Palumbo. *La temperatura y las magnitudes físicas.* Anales de la Sociedad Científica Argentina, 1943, tomo CXXXV, Entregas III y sig.

Sabemos, sin embargo, que las indicaciones de dos termómetros diferentes coinciden sólo en los puntos fijos de la escala convencionalmente adoptada. Tenemos así tantas temperaturas diferentes como substancias y escalas distintas se nos ocurra adoptar. Si entre estas infinitas temperaturas preferimos una determinada, ello es asunto de mera convención, y en esta convención nos dejamos guiar por las ventajas que *esta* temperatura tiene con respecto a *aquélla*.

El carácter convencional en lo que se refiere a la elección de *una* temperatura está tan patente, que es sin duda alguna esta circunstancia la que ha hecho considerar que *esa* temperatura, así, tan arbitrariamente elegida, no es una magnitud física como lo son en cambio, por ejemplo, longitud, tiempo o volumen.

Sin embargo, «la longitud» y «el tiempo» que habitualmente usamos en la física son también el resultado de convenciones más o menos arbitrarias. No me referiré aquí a la longitud y a la posibilidad de elegir otro grupo de axiomas de congruencia que nos llevarían a la necesidad de tener que considerar muchas longitudes porque todo esto parecería que son sutilezas de orden filosófico. Me referiré, pues, únicamente al tiempo. Disponemos aquí de muchos *relojes* como allá disponíamos de muchos *termómetros*. Tenemos *un* tiempo definido por el ángulo horario del Sol, *otros* por los ángulos horarios de la Luna o de tal o cual planeta o estrella, etc. El siguiente cuadro permite apreciar este paralelismo formal.

Relojes	Termómetros
Sol	mercurio
Luna	alcohol
estelares { Sirio Antares Punto Vernal	gases reales { hidrógeno oxígeno helio
Ecuaciones mecánicas	Ecuaciones termodinámicas

Poincaré, en su obra «La Valeur de la Science», pág. 44, dice:

«No hay manera de medir el tiempo que sea más ver-
«dadera que otra; la que es generalmente adoptada
«es sólo más cómoda. De dos relojes, no tenemos
«derecho alguno de decir que el uno marcha bien y
«el otro mal, podemos solamente decir que se tiene
«cierta ventaja al referirse a las indicaciones del pri-
«mero».

Si definimos el tiempo por un reloj de Sol aparecerá muy sencilla la ley del movimiento diurno de ese astro, pero más complicadas otras leyes de la física (las de la electrólisis, por ejemplo) y figuraría por todas partes la ecuación del tiempo de los astrónomos, lo que sería sin duda alguna muy apreciado por los adoradores del Sol, que tendrían así un motivo más para suponerlo causa, dueño y señor de todo el universo, ya que, entre otras cosas, la posición del Sol sería la *causa* de la irregularidad en el movimiento de los péndulos. A continuación hacemos resaltar el paralelismo formal entre tiempo y temperatura.

Las indicaciones de un reloj de Sol difieren bastante con las de otro de Luna, siendo en cambio casi coincidentes las de los distintos relojes estelares.	Las indicaciones de un termómetro de mercurio difieren bastante con las de otro de alcohol, siendo en cambio casi coincidentes las de los termómetros de gases.
El tiempo definido por un reloj estelar cualquiera difiere muy poco del tiempo definido por las ecuaciones de la mecánica que corresponde a las indicaciones de un reloj ideal.	La temperatura definida por un termómetro de gas cualquiera difiere muy poco de la temperatura definida por las ecuaciones de la termodinámica que corresponde a las indicaciones de un termómetro de gas ideal.
Los tiempos t_1; t_2; t_3; ... definidos por los relojes R_1; R_2; R_3; ... están vinculados al tiempo t, definido por las	Las temperaturas t_1; t_2; t_3; ... definidas por los termómetros T_1; T_2; T_3... están vinculadas a la tempera-

ecuaciones de la mecánica, por funciones más o menos complicadas:

$$t = F_i(t_i).$$

(Ecuación del tiempo en el caso del Sol).

tura t, definida por las ecuaciones de la termodinámica, por funciones más o menos complicadas:

$$t = F_i(t_i).$$

(Fórmula de Lord Kelvin).

Consideramos, pues, que constituye una verdadera injusticia el tratar de impedir que «la señora temperatura» entre al viejo recinto de las magnitudes físicas.

Discusión:

T. Isnardi (Buenos Aires).

La división del tiempo no puede hacerse con análoga arbitrariedad con que se elige una escala de temperatura empírica, porque aquella debe satisfacer al principio de casualidad (o determinista). En tal sentido el tiempo *causal* de la física clásica (mejor dicho: el «intervalo» o «duración») es una magnitud y no lo es la temperatura empírica, entendiendo por «magnitud» la noción habitual (véase, por ej., F. Enriques; Questioni riguardanti le matematiche elementari. Tl, p. 289). Ignoro si el Dr. Loedel Palumbo utiliza otra.

El tiempo de la teoría especial de la relatividad es, en cada sistema inercial, *exactamente el mismo tiempo causal de la física clásica.*

G. Beck (Córdoba). En la discusión sobre magnitudes físicas creo que es posible y tal vez útil tomar una posición intermediaria entre los dos puntos de vista expresadas por los Doctores T. Isnardi y E. Loedel Palumbo.

Para la descripción de fenómenos físicos tenemos que eligir arbitrariamente tres magnitudes derivables de centímetros gramos y segundos. En principio, cualquiera tres combinaciones independentes de cm., gr. y sec., pueden servir y, entre otras, podemos eligir la energía (grcm^2 sec^{-2}). Utilizando la relación de Boltzmann

$$E = k' . T = k . f(t)$$

y atribuyendo a la constante k de Boltzmann arbitrariamente la dimensión de un número, podemos considerar la temperatura (en una escala arbitraria) como una de las tres magnitudes básicas, de acuerdo con la opinión del Dr. Loedel Palumbo. Del punto de vista práctico, tal posibilidad presenta, sin embargo, poco interés.

Nosotros, por razones históricas, estamos acostumbrados a utilizar el tiempo como una de las tres magnitudes fundamentales. Como mostró el Doctor T. Isnardi, el postulado de mantener la forma habitual (arbitraria, pero también aceptada por costumbre) del principio de causalidad, ya es suficiente para determinar la escala del tiempo. Una vez el tiempo y p. ej., el centímetro y el grama elegidos, la temperatura queda una magnitud derivada que, en la forma eligida de la descripción de los fenómenos, ya no puede exigir el mismo carácter fundamental que el tiempo. En el informe siguiente el Doctor E. Sábato expondrá un trabajo muy interesante que prueba que incluso la termodinámica fenomenológica puede ser formulada sin utilizar explícitamente el concepto de temperatura.

E. Sabato (Buenos Aires). *El Concepto de Temperatura en la Termodinámica Fenomenológica.*

El Primer Principio es la expresión de la conservación de la energía en los procesos termodinámicos y se refiere a cantidades de calor y trabajo; nada tiene que hacer allí el concepto de temperatura; su intervención se debe al hecho histórico de que las cantidades de calor fueron definidas y medidas con la ayuda de termómetros.

El concepto de temperatura está esencialmente vinculado al Segundo Principio, que en cierto modo puede ser considerado como una *definición* de la temperatura. Es muy discutible, pues, la posibilidad y la legitimidad de cualquier noción de temperatura antes de este principio.

En el trabajo expuesto en esta reunión se trata de seguir otro camino, llegando hasta el segundo principio sin la ayuda de termómetros y definiendo luego la temperatura en la forma de Lord Kelvin. En líneas generales, el método consiste en definir el estado de un sistema mediante otros parámetros, prescindiendo de la temperatura; por ejemplo, mediante la presión y el volumen en el caso sencillo de un gas. De este modo es posible realizar la experiencia de Joule sin la ayuda de termómetro; se define así la energía interna y luego las cantidades de calor. Mediante el conocimiento de los parámetros de estado se pueden calcular, pues, las cantidades de calor entregadas o absorbidas por un sistema.

Hasta llegar al Segundo Principio se evita sistemáticamente la noción de *equilibrio térmico* entre dos o más cuerpos, porque esta noción arrastra esencialmente el Segundo Principio. Este principio es enunciado en forma parecida a la corriente, prescindiendo, sin embargo, de la idea de temperatura y hablando de fuentes que puestas en contacto intercambian cantidades de calor. Se deducen luego una serie de teoremas y se arriba a la definición de temperatura absoluta mediante el rendimiento de una máquina térmica. Sin necesidad de gases ideales ni de ciclos de Carnot (lo que representa una economía respecto del camino) se puede definir la entropía de un sistema y finalmente establecer la fórmula de Lord Kelvin, que permite pasar de la temperatura absoluta a una temperatura empírica definida mediante un termómetro cualquiera.

Mediante este camino la construcción de la termodinámica fenomenológica se hace más lógica y económica; además muestra que la temperatura no es un concepto esencial sino reductible a otros más básicos (trabajo), tal como ya la estadística lo ha hecho por su lado.

Finalmente, el trabajo no pretende ser una fundamentación axiomática de la termodinámica. Tal fundamentación no parece posible en el estado actual. La termodinámica se construye — por lo menos hoy — sobre la base de conceptos mecánicos y electrodinámicos; no se comprende, pues, cómo ha de ser posible una fundamentación axiomática de la termodinámica siendo que debe basarse en ramas de la física que no forman un sistema lógico cerrado. Todo intento de este género debe llevar, por lo tanto, a contradicciones intrínsecas; en particular, la *reversibilidad* que se supone en las leyes de la mecánica y de la electrodinámica clásica se hallará en contradicción con el Segundo Principio.

Comunicaciones:

A. L. Mercader y A. I. De Diego (La Plata). *Análisis Espectral Cualitativo de Gérmenes.*

Se analizaron por absorción los lisados de cinco gérmenes: Coli, Piociánico, Carbunclo, Estafilococo y Pasteurella, cultivados en caldo común, así como también el medio en que cultivaron.

Los espectrogramas obtenidos fueron de absorción continua, desde el lejano ultravioleta al visible. Posiblemente debido a la presencia de un complejo de sustancias, de composición química a cadena abierta.

Igual procedimiento se utilizó con una suspensión de virus de Encefalomielitis Equina en agua bidestilada, cultivado en cerebro de cobayo. El resultado obtenido fué igual a los anteriores.

Se realizó el análisis cualitativo de los elementos componentes de los gérmenes, por el método de emisión. Se ensayaron cinco procedimientos: 1) Chispa con lisado de gérmenes y electrodos de Platino. 2) Arco y chispa de una parta de gérmenes con electrodos de Cobre y de Hierro. 3) Chispa y arco producidas en un ambiente pulverizado con lisado de gérmenes y por insuflación de este lisado dentro de la llama. 4) «Funkenbogen», haciendo saltar la descarga entre dos gotas de la solución. 5) Arco entre electrodos de Carbón, con la sustancia en el electrodo negativo inferior. Estos dos métodos últimos, fueron los que dieron mejores resultados.

Los electrodos en el último caso fueron de Grafito Acheson tratados por ácidos clorhídrico y nítrico en caliente durante 20 hs. y luego sometidos a una corriente de 200 a 260 A, operación repetida varias veces.

El análisis comparativo entre el Piociánico, Subtilis y Coli dió *Fe, Ba, Ca, Si, Bo, P Mn, Mg, Na, Sr, C, K* y *Cu,* en todos y ciertas diferencias respecto a cada germen en lo referente al *Pb, Al, Ni* y *Cr.*

F. Vierheller y M. G. Malfatti (La Plata). *Estudio sobre Roentgendiagramas de Cálculos Biliares.*

Resulta de nuestras investigaciones que los Roentgendiagramas de las concreciones biliares de numerosos enfermos muestran siempre líneas de difracción correspondientes al colesterol con un grado de intensidad en corelación con la riqueza del mismo en las concreciones estudiadas. Los autores que se han ocupado anteriormente del tema en Alemania y Estados Unidos han citado en sus trabajos una sola distancia de 32 U. A., mientras que nosotros sostenemos haber encontrado otras líneas correspondientes a determinadas distancias intra — e intermoleculares.

El material, objeto de este estudio, ha sido perfectamente clasificado en cuanto a su origen clínico salvo en los primeros ensayos en que solo deseábamos conocer la posibilidad y probabilidades que tenían nuestras investigaciones.

Los cortes de las concreciones biliares fueron sometidos a los raxos X en el aparato de la General Electric XRD del Instituto de Física de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de La Plata.

Obtenidos numerosos diagramas mediante la técnica Laue-Debye y efectuando los cálculos correspondientes que detallamos en el trabajo original hemos llegado a las siguientes conclusiones:

1. La distancia de 16,31 UA correspondería al tamaño de la molécula del colesterol,

2. la distancia de 6,075 UA a la distancia entre los límites de los tres primeros anillos aromáticos,

3. la distancia de 4,92 UA a la distancia entre los dos primeros anillos aromáticos y

4. el valor numérico de 32,62 UA correspondería al espacio que ocupan dos moléculas de colesterol, colocadas la una al lado de la otra en el sentido de su mayor extensión.

5. El valor de 3,8 UA corresponde probablemente a la distancia entre dos moléculas situadas en dos paralelogramas.

6. El valor de 5,41 UA sería el de la distancia entre dos moléculas ubicadas en igual sentido por detrás y delante de la molécula considerada en el plano del papel.

7. Los demás valores de 10,87 — 6,52 — 4,66 y 3,63 UA pertenecen a órdenes mayores e impares del valor primitivo de 32,62 UA.

8. Hemos medido los ángulos de los paralelogramas que corresponden a cristales de colesterol puro (pertenecientes al sistema monoclínico según nuestros estudios de polarización y

trabajos de autores anteriores), arrojando un valor de 100° 20' y de 79° 40' respectivamente en forma aproximada, y

9. Hemos tratado de distribuir y ubicar dos moléculas de colesterol dentro de un paralelograma, consiguiendo una distribución sobre cuya exactitud podremos pronunciarnos más categóricamente en trabajos que publicaremos en el futuro.

A. Rodríguez (La Plata). *Estudio de la Orientación de los Microcristales de Bismuto en Láminas obtenidas electrolíticamente y por Condensación de sus Vapores en el Vacío y posible Influencia de un Campo Magnético intenso en dicha Orientación.*

El presente trabajo, que se viene realizando en colaboración con el Sr. José A. Balseiro, tiene por objeto estudiar la orientación de los microcristales de bismuto en láminas policristalinas obtenidas electrolíticamente y por condensación de sus vapores en el vacío, y su posible modificación por la acción de un campo magnético intenso durante el proceso de cristalización.

La suposición de que pueda existir esa modificación está fundada en el conocimiento de la siguiente propiedad que posee el bismuto y que fué puesta de manifiesto por los trabajos de A. Goetz y M. F. Hasler (1): si se hace crecer un cristal de bismuto de tal modo que una mitad lo haga normalmente y la otra bajo la acción de un campo magnético intenso, se observa que el cristal así obtenido aunque no presenta discontinuidad cristalográfica visible, muestra una marcada discontinuidad en las propiedades eléctricas; en efecto, las dos mitades exiben un potencial termoeléctrico en su unión.

En trabajos posteriores A. Goetz y R. C. Hergenrother (2) han probado que esa discontinuidad en las propiedades eléctricas no se debe a una modificación de los parámetros que caracterizan al cristal elemental, sino que más bien debe atribuirse a la forma en que esos cristales elementales se arreglan o colocan para constituir la malla cristalográifca, cuando actúa o no el campo magnético.

(1) *Phys. Rev.* Vol. *36*, pág. 1752 (1930).
(2) *Phys. Rev.* Vol. *40*, Nº 2. Pág. 137 (1932).

Puesto que las diferencias debidas a este mayor o menor grado de perfección en el arreglo o acomodación de los cristales elementales para constituir la malla cristalográfica no puede ser puesta de manifiesto roentgenográficamente, nosotros hemos pensado que esa diferencia, si podría ser revelada con el auxilio de los Rayos X, en el caso de láminas policristalinas, en las cuales los cristales elementales se orientan al azar o a lo sumo según una dirección de privilegio.

Sintéticamente los resultados obtenidos hasta el presente son:

a) *Láminas electrolíticas*

1) Se han obtenido láminas de espesores que varían entre 0.01 y 0.05 mm. utilizando una solución perclórica de óxido de bismuto, anodo de bismuto y cátodo de acero al cromo níquel.

2) La bondad del depósito depende esencialmente de la densidad de corriente, siendo la óptima de 5 mA por cm^2.

3) Existe una orientación según la normal al cátodo que no depende del cátodo utilizado. Esa orientación se *define* con el aumento de espesor de la lámina.

4) No existe ninguna modificación cuando actúa un campo magnético cuya intensidad es del orden de los 4000 Gauss.

b) *Láminas obtenidas por condensación de sus vapores*

1) Se han obtenido láminas de espesores que varían entre 0.01 y 0.1 μ condensando los vapores en un soporte de celuloide.

2) Existe una orientación según la normal al soporte que se *define* a medida que aumenta el espesor.

3) El grado de orientación es una función de la temperatura y de la espontaneidad de la evaporación.

4) La orientación se produce siempre según la normal al soporte y no depende de la inclinación del soporte respecto de la dirección de incidencia de los vapores.

5) No existe ninguna modificación cuando actúa un campo magnético cuya intensidad es del orden de los 8000 Gauss.

H. Isnardi (La Plata). *Espectroscopía de Soluciones.*

Descripción del dispositivo experimental para el estudio del espectro de soluciones. El líquido corre en forma de gotas, mojando los terminales de una chispa, que, según el caso, se eligen de material apropiado (*Ni, Cu, Fe, Ag, Pt, C*). Los espectrogramas han sido obtenidos utilizando el espectrógrafo Zeiss de tres prismas de vidrio y cámera de 84 centímetro de foco.

Con el método descrito hemos podido verificar la presencia de *Cs, Rb, Li, Sr* y *Ba*, disueltos en agua al estado de cloruro, para concentraciones de 10^{-7} para *Cs*; 10^{-8} para *Rb* y 10^{-9} para *Li, Sr* y *Ba*, así como también, la presencia de alguno de estos elementos y de muchos otros en aguas minerales argentinas, en las aguas potables de las ciudades de Buenos Aires y de La Plata, en semillas vegetales y en líquidos y órganos humanos y animales.

La descripción detallada del dispositivo y resultados obtenidos por su medio serán publicados separadamente en esta revista.

O. Rial (Buenos Aires). *Sobre la Teoría del Método del Estribo de* Lenard *para Medir Tensiones Superficiales.*

El llamado «método del estribo» propuesto por Lenard y colaboradores (Ann. d. Phys., *74*, 381, 1924) y estudiado experimentalmente con detalle en su escuela de Heidelberg, en especial por Moser (id., *82*, 993, 1927) y por Schwenker (ibid., *11*, 525, 1931) es tal vez el mejor método conocido hoy para medir tensiones superficiales. Pese a ello y a consecuencia de que la exposición original de Lenard es demasiado escueta, este método suele aún suscitar dudas respecto de su limpieza teórica, tal como puede verse en Dorsey (Sc. Pap. of Bur. Stand., *21*, 563, 1926) o en el completo y moderno tratado de Adam: The Physics and Chemistry of Surfaces, 3ª. ed., 1941, pág. 383.

El primer objeto de este trabajo es, pues, deducir las ecuaciones utilizadas en el método del estribo, con sus respectivas correcciones, en forma rigurosa y detallada, para poner en claro su exactitud de principio. En segundo lugar se demuestra cómo, conduciendo el cálculo en forma diferente de la sugerida por Lenard, se obtienen fórmulas finales distintas, más simples y más precisas que las utilizadas corrientemente.

Cuando un cuerpo descolante filiforme se levanta de la superficie de un líquido cualquiera, la resultante de todas las fuerzas verticales que lo empujan hacia abajo vale:

$$P = \int_{l_2}^{l_1} [2(\alpha + h s r) \operatorname{sen} Q - G_\sigma]\, d\, l$$

en donde: α = tensión superficial; h = altura de la película líquida; s = peso específico del líquido; r = radio del hilo; 1 = longitud del mismo; Q = ángulo variable que forma la película con el horizonte, en el hilo; G_σ = el empuje de Arquímides correspondiente al elemento de volumen del hilo sumergido; y, P = el peso (fuerza) necesario para mantener el equilibrio, registrado por una balanza ad-hoc.

El valor que hace máxima esta función en el caso de un estribo, y previa la introducción de varias correcciones, es:

$$P_{máx} = 2\, l\, \alpha + 2\, l\, r\, a\, s\, [1 + \frac{lr + \pi r^2}{2l(a+2r)}] -$$

$$-\frac{1}{2} \pi r^2\, l\, s + 4\, R\, \alpha\, [1 - \sqrt{1 - r^2/R^2} - \operatorname{arc\,sen} r/R] +$$

$$+ 2\, R\, a\, s\, [r\, (2 - \sqrt{1 - r^2/R^2}) - R \operatorname{arc\,sen} r/R] \qquad (1)$$

en donde: a = constante capilar $= \sqrt{2\,\alpha/s}$; R = radio del alambre del marco del estribo; y las demás letras tienen el significado que ya hemos dicho.

Despejando de esta igualdad el valor de la tensión superficial para estribos con alambre de medida del orden de 0,1 mm. de radio o menos, y marcos de 0,5 mm. como máximo, se obtiene la llamada «ecuación reducida» de Lenard.

$$\alpha = \alpha' - r\, (\sqrt{2\, \alpha' s} - \frac{2\alpha'}{l}) + r^2\, [(1 + \frac{\pi}{4})\, s - \frac{3}{l} \sqrt{2\, \alpha' s}]$$

en donde: $\alpha' = \frac{P}{2l}$ (tensión superficial «bruta» de Lenard).

Se puede llegar a resultados más satisfactorios calculando, no el valor que hace P máx., sino el que hace ΔP máx. Para ello no hay más que imaginar una rotura ficticia de la película líquida a medida que el estribo se va elevando de la superficie, con lo que desaparecen en el desarrollo las correcciones debidas a la emergencia del marco. Si se introducen además variables circulares en el estudio de las restantes correcciones, se obtiene la siguiente igualdad:

$$\Delta P_{máx} = 2\,l\,\alpha + 2\,l\,r\,a\,s\,[1 + \frac{r}{2(a+2r)}] - $$
$$- \frac{1}{2}\pi\,r^2\,l\,s + 2\,\alpha\,r\,(\frac{r}{R} - 2) + a\,s\,r^2\,r/R$$

en lugar de la complicada ec. (1), y en donde las letras tienen el significado usual.

De ahí se deduce una nueva ecuación reducida:

$$\alpha = \alpha' - r\,(\sqrt{2\,\alpha' s} - \frac{2\alpha'}{l}) + r^2\,[(1 + \frac{\pi}{4})\,s - \frac{3}{l}\sqrt{2\,\alpha' s}] - \frac{\alpha' r^2}{lR}$$

en donde es: $\alpha' = \dfrac{\Delta P}{2l}$.

Para un estribo tipo de 30 mm. de longitud y 0,1 mm. de espesor, con un marco de 0,5 mm. y actuante en agua, el error que introduce en la medida de la tensión superficial al reemplazar P por ΔP es de 0,02 %, mucho menor que la más precisa de las mediciones conocidas. En el mismo caso, la ecuación reducida de Lenard introduce un error de 0,5 %, mientras que la ecuación propuesta dá sólo 0,13 %. A este respecto debe tenerse en cuenta que el método del estribo permite mediciones de la tensión superficial con una precisión ya del orden del 0,5 %.

M. Bunge (Buenos Aires). *El Spin total de un Sistema de más de dos Nucleones.*

Se demuestra que en el caso de más de dos nucleones, el spin total deja de ser una integral del movimiento realizado bajo la influencia de fuerzas entre los spins. Tales fuerzas son, en consecuencia, suficientes para explicar procesos tales como la inversión de un spin, observados por Tsien.

G. BECK (Córdoba). *El Campo Electromagnético en la Teoría de* DIRAC.

Las dificultades encontradas en la teoría cuántica me llevaron a estudiar las clases de variables utilizadas en distintas teorías físicas.

La mecánica de *Newton* y de *Einstein* necesita dos clases de variables

a) variables cinéticas

$$u_i \quad (o \ \vec{v})$$

b) variables del campo

$$A_i \quad (o \, \vec{E}, \vec{H}).$$

En lugar de estas dos clases de variables se introducen en la mecánica de *Hamilton* y en la mecánica cuántica

b) variables del campo

$$A_i$$

c) variables canónicas

$$p_i = mc \,.\, u_i - e/c \,.\, A_i \qquad (*)$$

y representan una descripción equivalente a la primera.

La teoría de *Dirac* introduce

a) variables cinéticas generalizadas

$$\vec{\alpha}, \beta$$

c) variables canónicas

$$p_i.$$

Si, entonces, decidimos considerar las matrices de *Dirac* como variables dinámicas independientes, la teoría de *Dirac* contiene, por la vinculación (*) que existe entre variables cinéticas y canónicas, implícitamente las variables del campo. Pues, ya es bastante dar a esta teoría una forma más apropiada, para hacer aparecer explícitamente el campo electromagnético fluctuante, que la teoría de *Dirac* atribuye el vacío.

Un desarrollo más detallado de estas consideraciones será dado en breve en una memoria en la Physical Review.

E. Gaviola (Córdoba). *Origen y Desarrollo de los Cometas.*

Los cometas son objetos difusos, a veces con cola, que presentan variaciones pronunciadas e irregulares de luminosidad a lo largo de sus órbitas elípticas o parabólicas.

La influencia de las ideas Laplacianas ha hecho suponer que los cometas son condensaciones de materia difusa interestelar o interplanetaria. Dichas condensaciones no estarían completadas y por eso los cometas aparecerían difusos. Estos estarían formados por un enjambre meteórico envuelto en una atmósfera de gas y de polvo.

Un modelo tal es insostenible: no tiene estabilidad mecánica; no puede describir las variaciones pronunciadas irregulares de luminosidad; la masa calculada en base a la luminosidad de un polpo meteórico de partículas de 0,1 micrón de diámetro resulta 10^{11} veces menor que la observada en algunos pocos casos por perturbaciones gravimétricas; en un cometa hay dispersión y no condensación de materia, como la revela el espectrógrafo.

Para describir satisfactoriamente los hechos observados hay que construir un modelo formado de un núcleo sólido de 1 a 50 km. de diámetro, que es desgasado en el vacío interplanetario, al acercarse al sol, por el calentamiento producido. El proceso de desgasamiento es a veces violento, produciéndose erupciones de gases y polvo de tipo volcánico. La luminosidad de un cometa es proporcional a la cantidad de gas y polvo que pierde por segundo.

Al terminar el desgasamiento el cometa muere y se transforma en un asteroide, visible o no.

La vida de los cometas periódicos es corta: de decenas, centenas o miles de años. El origen debe ser, pues, reciente. La mayoría de los cometas brillantes descubiertos por primera vez lo son a los pocos años de nacer.

La clasificación usual de los cometas como pertenecientes a familias joviana, saturniana, neptuniana, solar, etc., indica que los cometas se originan en los astros que dan nombre a esas familias.

Ya Lagrange supuso en 1814 que los cometas tenían origen en la explosión de un planeta. El astrónomo ruso S. Vsessviatsky ha desarrollado en 1930-32 la hipótesis de que los cometa se originan en erupciones volcánicas de los grandes planetas. Vsessviatsky supone que la mancha roja de Júpiter indica la posición de un gran volcán en actividad desde 1878.

Como la velocidad de escape de Júpiter es de 60 km/seg, la velocidad inicial de un cometa al abandonar la superficie del planeta tendría que ser de ese orden de magnitud. Para producir tales velocidades no bastan los explosivos químicos ni radioactivos conocidos. Tampoco se conocen los explosivos que provocan las erupciones de las estrellas novae (velocidad inicial 3000 km/seg), de las prominencias eruptivas solares (v. i. 1000 km/seg), ni de las erupciones volcánicas terrestres.

La transformación del estado neutrónico de la materia según Landau, a presiones bajas, en materia común, o la descomposición de átomos más allá del límite de estabilidad del sistema periódico de los elementos ($z = 119$) podrían, talvez, explicar los fenómenos observados.

Discusión:

S. Gershánik (La Plata). Conociéndose la masa de los cometas y la velocidad inicial conque debieran ser lanzados desde el planeta que les da presumiblemente origen, se conoce la energía que dicho planeta les entrega.

En la tierra se puede, además, por vía sismométrica, estimar la energía que se pone en juego en un fenómeno sísmico, sea éste de origen volcánico o de origen tectónico.

Ahora bien; como es plausible aceptar que la materia del planeta que expulsa un proyectil de su seno, recibe en el momento de la expulsión una cantidad de energía del mismo orden de grandor que éste, se puede, cotejando ambos grandores, juzgar si también de la tierra, y con fenómenos volcánicos como los que hoy en día se registran, pueden nacer cometas.

La energía que debe ser impartida en el foco de un terremoto para que se produzca una oscilación en un punto a distancia X de él, está dada por $\eta \frac{8\pi^3 B^2 \rho V X^2}{T}$ fórmula en la que η es un coeficiente que depende del ángulo de incidencia y del rayo sísmico en el punto, y en el mismo: ρ la densidad del material, V la velocidad de propagación de una perturbación elástica, B la amplitud y T el período de la oscilación.

Con dicha fórmula resultaría, para el terremoto japonés del año 1923, una energía de unos 10^{25} ergs. Este terremoto fué de origen tectónico y uno de los más fuertes de los últimos tiempos. Los terremotos de origen volcánico se presentan con una energía mucho menor.

La idea del Dr. Gaviola de que pudiera ser que los planetas se expanden, y al hacerlo rompen la corteza de los mismos, aplicada al globo terrestre, encierra una nueva e interesante sugestión para explicar la causa de los terremotos. Trátase de una idea justamente opuesta a la de la contracción de los planetas por enfriamiento en base de la cual Dana, Heim y Suess explicaban estos fenómenos, así como los pliegues de las montañas.

La hipótesis de la contracción tuvo mucho auge hasta comienzos de este siglo, en que comenzó a desecharse porque el tamaño de los pliegues que se observan en las montañas no resultan compatibles con la variación de dimensiones que de acuerdo a la teoría debe experimentar una esfera que se enfría. En su lugar se ha puesto en boga la hipótesis de la translación de los continentes de Wegener. Pero también ésta está siendo objetada en razón de que no se encuentra una causa satisfactoria a la cual pueda atribuirse la translación.

E. Gaviola (Córdoba). En el caso de la eyección de un proyectil liviano por un cuerpo pesado la casi totalidad de la energía es llevada por el proyectil. Con 10^{25} ergios es posible lanzar desde la tierra, con 11 Km/seg. de velocidad inicial, un cuerpo de $1{,}7.10^{13}$ gr. o sea 3.10^{-15} veces la masa de la tierra. Si el cuerpo tiene una densidad media de 5,5 y es de forma esférica, su diámetro será de 200 metros. Suponiendo que las energías liberadas son proporcionales a las masas, los cometas emitidos por Júpiter (masa 318 veces tierra) con una velocidad inicial de 60 Km/seg. tendrían una masa de 2.10^{14} gr. o sea 4.10^{-14} veces la masa de la tierra. Para una densidad de 1,3 (densidad media de Júpiter) el diámetro del núcleo del cometa resultaría de 670 metros.

Las observaciones astronómicas muestran que las masas de los cometas son inferiores a 10^{-12} (tierra unidad) y los diámetros inferiores a unos pocos kilómetros. Las energías liberadas en movimientos tectónicos podrían generar, pues, cometas de dimensiones en armonía con las observaciones astronómicas.

TEMAS PROPUESTOS

50. - Estudiar la ecuación funcional

$$f(f(x)) = \frac{1}{x}.$$

L. A. Santaló

SOBRE EL CIRCULO DE RADIO MAXIMO CONTENIDO EN UN RECINTO

por L. A. Santaló

El objeto de esta nota es la demostración del siguiente teorema:

Dado en el plano un recinto de área F cuyo contorno sea una curva cerrada de Jordan, rectificable y de longitud L, siempre existe un círculo de radio

$$\rho \geqq \frac{F}{L} \tag{1}$$

contenido en el recinto.

La acotación (1) *es la mejor posible, en el sentido de que no puede sustituirse por otra de la forma* $\rho \geqq c\frac{F}{L}$ *con un coeficiente constante* $c > 1$.

Entendemos que el contorno forma parte del recinto y, por tanto, el círculo de radio ρ puede tener puntos comunes con el contorno.

G. Grünwald y P. Turán en el trabajo *Über den Blochschen Satz* (Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientiarum Mathematicarum, Tomo VIII, 1936-37, pág. 238) demuestran, como lema, la misma propiedad anterior, pero dando para ρ la acotación

$$\rho \geqq \frac{1}{4\pi+2}\,\frac{F}{L}$$

que es menos fuerte que la (1).

En el mismo trabajo mencionan los autores que G. Grünwald y E. Varzsonyi han establecido la acotación (1), pero no publican la demostración.

Por esta razón creemos que puede ser útil la demostración que vamos a dar, la cual sirve también, como veremos, para demostrar el teorema análogo para recintos situados sobra la superficie esférica (geometría elíptica) o recintos situados sobre las superficies de curvatura constante negativa (geometría hiperbólica).

1. *Caso del plano.* — Recordemos una fórmula de Geometría Integral. Sea R el recinto dado, de área F y contorno de longitud L. Supongamos un círculo C de radio ρ que no pueda contener totalmente a R en su interior. En una posición cualquiera de C, sea ν el número de partes simplemente conexas de que se compone la intersección de C con R (por ejemplo, en la fig. 1 es $\nu = 2$; si C está contenido en el interior de R sera $\nu = 1$). Si $P(x, y)$ es el centro del círculo C y ponemos $dP = dx\,dy$, vale la siguiente fórmula integral de Blaschke (1)

$$\int \nu \, dP = F + \rho L + \pi \rho^2 \tag{1.1}$$

donde la integración está extendida a todo el plano, siendo $\nu = 0$ cuando C y R no tienen punto común.

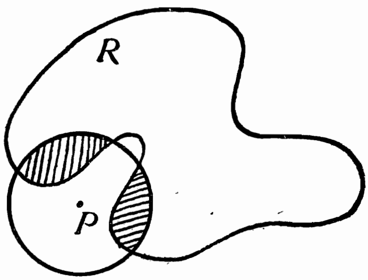

Fig. 1.

Además, si n es el número de puntos comunes del contorno C con el contorno de R (por ejemplo, en la fig. 1 es $n = 4$), vale también (2)

(1) Ver W. BLASCHKE, *Vovlesungen über Integralgeometrie*, Hamburger Mathematische Einzelschriften, nº 20, 1936, pág. 37. La fórmula de Blaschke es mas general, valiendo para dos recintos cualesquiera R, R'. Aquí utilizamos el caso particular de ser R' un círculo.

(2) W. BLASCHKE, loc. cit. pág. 24, o bien L. A. SANTALÓ, *A theorem and an inequality referring to rectifiable curves*, American Journal of Mathematics, Vol. 63, 1941, pág. 635.

$$\int n\,dP = 4\,L\,\rho \tag{1.2}$$

extendida también la integración a todo el plano.

Utilizando las fórmulas (1.1) y (1.2) la demostración del teorema es fácil.

Sea M_0 la medida del conjunto de puntos P pertenecientes a R y que sean centros de círculos de radio ρ cuyo contorno no corte al contorno de R, o sea, sean centros de círculos C contenidos en R. Para estos círculos será $n=0$. De (1.1) y (1.2) se deduce

$$M_0 + \int\limits_{n \neq 0} \left(\nu - \frac{n}{2}\right) dP = F + \pi\,\rho^2 - L\,\rho. \tag{1.3}$$

estando la integración extendida a todos los puntos P que son centros de círculos C para los cuales es $n \neq 0$.

Sea A un punto común a los contornos de C y de R. Si en A el contorno de R no atraviesa a la recta tangente a C, diremos que C y R se *tocan* en A. Por suponer el contorno de R rectificable, tendrá tangente en casi todo punto y por tanto la medida del conjunto de los puntos P que son centros de círculos C que tocan el contorno de R es nula, y por consiguiente estas posiciones de C no influyen en las integrales (1.1), (1.2), (1.3). Prescindiendo de estos casos, siempre que sea $n \neq 0$, será $\frac{n}{2} \geqq \nu$, puesto que cada parte simplemente conexa de la intersección de C con R está limitada por arcos de los contornos de C y R y por tanto exige por lo menos dos puntos de intersección de estos contornos.

Escribamos (1.3) en la forma

$$M_0 = \int\limits_{n \neq 0} \left(\frac{n}{2} - \nu\right) dP + F + \pi\,\rho^2 - L\,\rho \tag{1.4}$$

Siendo $\frac{n}{2} \geqq \nu$, de esta igualdad (1.4) se deduce que será seguramente $M_0 > 0$ si $F - L\rho = 0$, o sea,

$$\rho = \frac{F}{L}. \tag{1.5}$$

El hecho de ser $M_0 > 0$ para este valor (1. 5) de ρ, nos dice que siempre habrá círculos de este radio contenidos en R. Es lo que queríamos demostrar.

En la demostración hemos supuesto que ρ era tal que C no podía contener totalmente a R en su interior. Esto ocurre efectivamente para el valor (1. 5) de ρ. En efecto, para toda figura plana vale la desigualdad isoperimétrica $L^2 - 4\pi F \geqq 0$, de donde

$$\frac{F}{L} \leqq \frac{\sqrt{F}}{2\sqrt{\pi}}. \tag{1. 6}$$

Si r es el radio de un círculo que contiene a R es $F \leqq \pi r^2$ y por tanto, según (1. 6),

$$r \geqq 2\frac{F}{L},$$

es decir, para el valor (1. 5) de ρ, el círculo C no puede contener a R.

La acotación (1) para ρ no puede mejorarse en el sentido de poner $\rho \geqq c\frac{F}{L}$, con $c > 1$. En efecto, consideremos un rectángulo de lados a y b, con a suficientemente grande. Para este recinto es

$$\frac{F}{L} = \frac{ab}{2(a+b)}. \tag{1. 7}$$

El máximo círculo contenido en este recinto es el de radio $\rho = b/2$ y tomando a suficientemente grande, vemos por (1. 7) que la razón $\frac{F}{L}$ se acerca tanto como se quiera a este valor y por tanto ningún círculo de radio $> \frac{F}{L}$ podría estar contenido en dicho recinto.

2. *Caso de la esfera.* — Sobre la superficie de la esfera de radio unidad vale un teorema análogo al anterior, que se enuncia:

Dado sobre la superficie de la esfera de radio unidad un recinto de área F cuyo contorno sea una curva de Jordan rectificable de longitud L, y que esté contenido en una semiesfera, *siempre existe un círculo menor de radio esférico* ρ *cumpliendo la relación*

$$\operatorname{tg} \rho \geqq \frac{F}{L} \tag{2.1}$$

contenido en el recinto.

La acotación (2.1) *no puede sustituirse por otra de la forma* $\operatorname{tg} \rho \geqq c \dfrac{F}{L}$ *con un coeficiente constante* $c > 1$.

La demostración es la misma anterior. Solo hay que sustituir la fórmula (1.1) por la siguiente ([3])

$$\int \nu \, dP = L \operatorname{sen} \rho + F \cos \rho + 2\pi (1 - \cos \rho) \tag{2.2}$$

donde dP indica el elemento de área de la superficie esférica correspondiente al centro del círculo C de radio esférico ρ y ν tiene el mismo significado que en (1.1).

La fórmula (1.2) para las curvas esféricas se escribe

$$\int n \, dP = 4 L \operatorname{sen} \rho. \tag{2.3}$$

De (2.2) y (2.3) el mismo razonamiento seguido en el caso del plano nos lleva a la fórmula

$$M_0 = \int_{n \neq 0} \left(\frac{n}{2} - \nu \right) dP + 2\pi (1 - \cos \rho) + F \cos \rho - L \operatorname{sen} \rho$$

y para asegurar que sea $M_0 > 0$ basta tomar

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{F}{L} \tag{2.4}$$

lo cual prueba el enunciado.

Lo mismo que para el plano, falta establecer que el círculo de radio ρ dado por (2.4) no puede contener al recinto R en su interior. En efecto, la desigualdad isoperimétrica sobre la esfera es $L^2 + F^2 - 4\pi F \geqq 0$, que puede escribirse

---

([3]) W. Blaschke loc. cit., pág. 82. La fórmula de Blaschke vale para dos recintos cualesquiera: la fórmula (2.2) corresponde al caso particular de ser uno de ellos un círculo. También la fórmula (2.3) que sigue es un caso particular de la llamada fórmula de Poincaré para la esfera (loc. cit. pág. 81).

$$\left(\frac{F}{L}\right)^2 \leqq \frac{F}{4\pi - F}. \tag{2.5}$$

Todo círculo de radio esférico r que contenga a R deberá tener su área igual o mayor que la de R, o sea, $F \leqq 2\pi(1-\cos r)$ y por tanto (2.5) da

$$\left(\frac{F}{L}\right)^2 \leqq \frac{2\pi(1-\cos r)}{2\pi(1+\cos r)} = \operatorname{tg}^2 \frac{r}{2}. \tag{2.6}$$

Como estamos siempre considerando figuras contenidas en una semiesfera es $r \leqq \frac{\pi}{2}$ y por tanto $\operatorname{tg} r > \operatorname{tg} \frac{r}{2}$. Luego, para que C contenga a R debe ser $\operatorname{tg} r > \frac{F}{L}$; por consiguiente con el valor de ρ dado por (2.4), el círculo C no puede contener a R en su interior.

Análogamente a lo que ocurre para el plano, en el caso actual de la esfera la acotación (2.1) para ρ no puede tampoco mejorarse en el sentido de poder poner $\operatorname{tg} \rho \geqq c \frac{F}{L}$, siendo c una constante mayor que 1. En efecto, consideremos el recinto R limitado por dos arcos de círculos menores concéntricos, de radios r_1, r_2 respectivamente, y los arcos de radio esférico correspondientes a los extremos. Si el ángulo en el centro de estos dos arcos de círculo menor es α, el área F y longitud L de R serán:

$$F = \alpha(\cos r_2 - \cos r_1)$$

$$L = \alpha \operatorname{sen} r_1 + \alpha \operatorname{sen} r_2 + 2(r_1 - r_2)$$

y por consiguiente

$$\frac{F}{L} = \frac{\operatorname{tg} \frac{r_1 - r_2}{2}}{1 + \frac{2(r_1 - r_2)}{\alpha(\operatorname{sen} r_1 + \operatorname{sen} r_2)}}. \tag{2.7}$$

Fijado α y tomando la diferencia $r_1 - r_2$ suficientemente pequeña, el máximo círculo contenido en el recinto es el de radio $\frac{r_1 - r_2}{2}$ y según (2.7) vemos que la razón $\frac{F}{L}$ se acerca a la tangente de este ángulo en tanto como se quiera. Luego ningún círculo menor cuyo radio ρ satisfaga a la condición

$\operatorname{tg} \rho > \frac{F}{L}$, puede estar contenido en el recinto considerado, lo cual prueba la última parte del teorema.

3. *Caso de las superficies de curvatura constante negativa.* — Sobre las superficies de curvatura constante negativa $K = -1$, vale un teorema análogo a los anteriores que se puede enunciar de la manera siguiente:

Dado sobre una superficie de curvatura constante negativa $K = -1$, un recinto R de área F, cuyo contorno sea una curva cerrada de Jordan rectificable de longitud L, siempre existe un círculo geodésico de radio ρ cumpliendo la relación

$$\operatorname{tgh} \rho \geqq \frac{F}{L}$$

que está contenido en el recinto.

La acotación anterior no puede sustituirse por otra de la forma $\operatorname{tgh} \rho \geqq c \frac{F}{L}$ *con un coeficiente constante* $c > 1$.

La demostración es también la misma que para el plano, únicamente hay que sustituir la fórmula (1. 1) por la siguiente (4)

$$\int \nu \, dP = 2\pi (\operatorname{ch} \rho - 1) + F \operatorname{ch} \rho + L \operatorname{sh} \rho \tag{3. 1}$$

donde dP indica el elemento de área sobre la superficie de curvatura constante negativa $K = -1$, correspondiente al centro del círculo geodésico C de radio ρ y ν tiene el mismo significado que en (1. 1).

La fórmula (1. 2) sobre las superficies de curvatura $K = -1$ se escribe (4)

$$\int n \, dP = 4 L \operatorname{sh} \rho. \tag{3. 2}$$

De (3. 1) y (3. 2), el mismo razonamiento seguido para el caso del plano, lleva a la fórmula

(4) Ver L. A. SANTALÓ, *Integral Geometry on surfaces of constant negative curvature*, Duke Math. Jour., Vol. 10, 1943, pág. 699. Para la fórmula (3.2) siguiente ver el mismo trabajo, pág. 697. Las fórmulas aquí utilizadas corresponden al caso particular en que uno de los recintos es un círculo geodésico.

$$M_0 = \int\limits_{n \neq 0} \left(\frac{n}{2} - \nu\right) dP + 2\pi(\operatorname{ch}\rho - 1) + F \operatorname{ch}\rho - L \operatorname{sh}\rho$$

y para asegurar que es $M_0 > 0$, o sea, que el círculo C puede estar contenido totalmente en el recinto, basta tomar

$$\operatorname{tgh}\rho = \frac{F}{L} \tag{3. 3}$$

lo cual demuestra el enunciado.

Lo mismo que para el plano, en la demostración se utiliza el hecho de que el círculo C no puede contener al recinto R. Falta demostrar, por tanto, que ningún círculo de radio ρ que satisface la condición (3. 3) puede contener a R.

La desigualdad isoperimétrica sobre las superficies de curvatura $K = -1$ es $L^2 - F^2 - 4\pi F \geqq 0$, la cual es válida para cualquier recinto R. Esta desigualdad se puede escribir

$$\left(\frac{F}{L}\right)^2 \leqq \frac{F}{4\pi + F}. \tag{3. 4}$$

Todo círculo C que contenga a R en su interior debe tener el área mayor o igual que F, o sea, $F \leqq 2\pi(\operatorname{ch}\rho - 1)$. Por tanto, de (3. 4) se deduce, puesto que el segundo miembro es creciente con F,

$$\left(\frac{F}{L}\right)^2 \leqq \frac{2\pi(\operatorname{ch}\rho - 1)}{4\pi + 2\pi(\operatorname{ch}\rho - 1)} = \operatorname{tgh}\frac{\rho}{2}.$$

Como $\operatorname{tgh}\rho > \operatorname{tgh}\frac{\rho}{2}$, resulta que el círculo de radio ρ dado por (3. 3) no puede contener a R en su interior, como faltaba demostrar.

Exactamente a como para el caso de la esfera, considerando el recinto R limitado por dos arcos de círculos geodésicos concéntricos a distancia suficientemente pequeña y los arcos de radio en los extremos, se demuestra que la desigualdad del enunciado no puede sustituirse por otra de la forma $\operatorname{tgh}\rho \geqq c\,\frac{F}{L}$ con un coeficiente constante $c > 1$, lo cual prueba la última parte del teorema.

Instituto de Matemática
Facultad de Ciencias Matemáticas
ROSARIO

UN EJEMPLO DE ESPACIO ACCESIBLE, NO NUMERABLE, SEPARABLE Y NO PERFECTAMENTE SEPARABLE

por Manuel Balanzat

(Tema nº 49, vol. IX, pág. 164)

I

En un trabajo anterior (1) hemos dado un ejemplo de un espacio D_0 con la potencia del continuo, separable y no perfectamente separable. Dicho espacio es por consiguiente una solución al tema propuesto, pero no siendo accesible no verifica la condición puesta en último lugar. El objeto de esta nota es obtener un ejemplo que verifique también dicha condición suplementaria.

Los puntos del espacio que vamos a estudiar están definidos por los siguientes conjuntos del plano cartesiano:

a) El eje OX.

b) El conjunto de las rectas de ecuaciones $y=\dfrac{1}{n}(n=1, 2, \dots)$.

c) Un conjunto numerable de puntos cualesquiera distintos de los anteriores.

Designaremos el primer conjunto de puntos por la letra M y sus elementos por las letras minúsculas $(a, b, \dots)$; al segundo conjunto lo designaremos con la letra N, y a sus elementos con la notación $A_r, B_s, \dots$ donde el subíndice indica que la ordenada del punto es $\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{s} \dots$ y la letra mayúscula indica que la abscisa es la misma que la de los puntos $a, b, \dots$; es decir convenimos en que los puntos $a, A_r, A_s, \dots$ designados con la misma letra tienen siempre la misma abscisa y a puntos $a, B_r, C_s, \dots$ con distintas letras les corresponden siempre abscisas distintas, las ordenadas siendo cero para los puntos designados con letras

(1) *Conjuntos compactos y separables en los espacios D_0*. Publicaciones del Instituto de Matemática de la Universidad del Litoral, volumen V.

minúsculas y $\frac{1}{r}, \frac{1}{s}$ ... para los designados con mayúsculas; finalmente designaremos al tercer conjunto por la letra P y a sus elementos con la notación $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$.

Definiremos la acumulación en este espacio de la manera siguiente:

Los entornos de un punto cualquiera a del conjunto M son los conjuntos $V_n(a)$ compuestos del punto a, de los puntos $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots$ y de los $A_n, A_{n+1}, \ldots$

Los entornos $V_n(A_r)$ de un punto A_r del conjunto N están formados por el punto A_r y los puntos $\alpha_n, \alpha_{n+1} \ldots$

Finalmente atribuiremos a los elementos α_r del conjunto P un solo entorno $V(\alpha_r)$ formado exclusivamente por dicho punto α_r.

Hemos así definido un espacio (V) que vamos a demostrar que es accesible, es decir que verifica las condiciones 1.ª, 2.ª, 3.ª y 5.ª de Riesz. La condición 1.ª: «Si un conjunto E está contenido en otro conjunto F, el derivado E' tiene que estar contenido en el derivado F'», queda verificada en todo espacio (V) y por lo tanto en el que estamos estudiando.

La segunda condición se enuncia: «Todo punto de acumulación de la suma de dos conjuntos es punto de acumulación de uno al menos de esos dos conjuntos», veamos que también se verifica esta condición.

En efecto: sean E y F dos conjuntos cualesquiera y sea $G = E + F$ el conjunto suma de los dos. Consideremos los conjuntos

$$E_1 = E \times M \quad E_2 = E \times N \quad E_3 = E \times P$$
$$F_1 = F \times M \quad F_2 = F \times N \quad F_3 = F \times P$$

(donde M, N, y P son los conjuntos definidos al principio cuya suma da el conjunto de todos los puntos del espacio considerado). Consideremos igualmente los conjuntos

$$G_1 = G \times M \quad G_2 = G \times N \quad G_3 = G \times P;$$

evidentemente se verifican las siguientes relaciones

$$E = E_1 + E_2 + E_3 \quad F = F_1 + F_2 + F_3 \quad G = G_1 + G_2 + G_3$$
$$G_1 = E_1 + F_1 \quad G_2 = E_2 + F_2 \quad G_3 = E_3 + F_3.$$

Supongamos ahora un punto de acumulación de G; podemos evidentemente considerar tres casos distintos según que dicho punto pertenezca al conjunto M al N o al P.

Consideremos primeramente el caso en que el punto de acumulación pertenezca a M; sea a dicho punto y sea $G_2(a)$ el conjunto de los puntos de G que tienen la misma abscisa que a. En todo entorno de a hay puntos de G, pero como los entornos de a, por definición, solo pueden contener puntos de N de la misma abscisa que a y puntos de P, se deduce que en todo entorno de a hay puntos o de G_3 o de $G_2(a)$.

Los conjuntos G_3 y $G_2(a)$ no pueden ser los dos finitos, ya que en este caso, tomando un número m superior a todos los subíndices de los puntos de ambos conjuntos, el entorno $V_m(a)$ no contendría ningún punto ni de $G_2(a)$ ni de G_3.

Si $G_2(a)$ es infinito, y son $E_2(a)$ y $F_2(a)$ los conjuntos de puntos de E_2 y F_2 que tienen la misma abscisa que a se verifica que $G_2(a) = E_2(a) + F_2(a)$, y por tanto uno de estos dos conjuntos, por ejemplo $E_2(a)$, es infinito; si $E_2(a)$ es infinito en cada entorno de a hay puntos de $E_2(a)$, luego se verifica que a es punto de acumulación de $E_2(a)$, y por lo tanto, teniendo en cuenta la primera condición de Riesz, es también punto de acumulación de E_2 y de E. Análogamente si fuera $F_2(a)$ infinito se demostraría que a sería punto de acumulación de F.

Si G_3 es infinito, uno de los dos conjuntos E_3 o F_3 es infinito y como en el párrafo anterior demostraríamos que a es punto de acumulación de E_3 o de F_3 y por lo tanto de E o de F. Vemos por lo tanto que en el caso en que el punto a de acumulación de G pertenezca al conjunto M tiene que ser siempre punto de acumulación de E o de F.

Supongamos ahora que el punto de acumulación de G pertenezca al conjunto N; sea A_r dicho punto, en todo entorno de A_r hay puntos de G, pero como los entornos de A_r solo contienen puntos de P, se deduce que en todo entorno de A_r hay puntos de G_3. Como en el caso anterior se ve que G_3 es infinito, y por lo tanto también lo es uno de los dos conjuntos E_3 o F_3, y el mismo razonamiento nos probaría que A_r es punto de acumulación de E_3 o de F_3, y por lo tanto también lo es de E o de F.

Quedaría ahora por considerar el tercer caso en que el punto de acumulación pertenece a P; este caso no puede presentarse puesto que el único entorno de cualquier punto α_n de P no contiene más punto que el mismo α_n, luego se deduce que los puntos de P no pueden ser nunca puntos de acumulación de ningún conjunto. *Queda así demostrado que el espacio que estamos considerando verifica la segunda condición de Riesz.*

La tercera condición de Riesz se enuncia: «Todo conjunto compuesto de un solo elemento carece de punto de acumulación», lo que, dicho de otra forma, significa que no existe ningún punto que esté contenido en todos los entornos de otro punto distinto. Basta observar las definiciones de entornos que hemos dado para deducir inmediatamente que *el espacio estudiado también verifica la tercera condición de Riesz.*

La quinta condición de Riesz se enuncia: «Todo conjunto derivado es cerrado». Vamos a ver que también se verifica esta condición; en efecto sea E un conjunto cualquiera, E' su derivado, distingamos dos casos distintos según que E contenga o no una infinidad de puntos de P.

Supongamos primeramente que E contenga infinitos puntos de P, entonces, teniendo en cuenta las definiciones de entornos que hemos adoptado, se ve que cualquier punto de M o de N es punto de acumulación de E, y como ya hemos establecido que los puntos de P no pueden ser de acumulación de ningún conjunto, se deduce que el derivado E' de E es el conjunto $M+N$, que es, evidentemente, cerrado.

Supongamos ahora que E solo contiene un conjunto finito o nulo de puntos de P, ningún punto de N puede ser de acumulación de E. En efecto: sea A_r un punto de N, si p es mayor que los subíndices de todos los puntos del conjunto $E \times P, V_p(A_r)$ no contiene ningún punto de $E \times P$, y como, según la definición de entornos, solo contiene además de A_r puntos de P, se deduce que $V_p(A_r)$ no contiene ningún punto de E distinto de A_r, luego A_r no puede ser punto de acumulación de E, es decir los únicos puntos de acumulación de E son los puntos del conjunto M.

Ahora bien, en los entornos de cualquier punto del espacio no existen puntos del conjunto M distintos de dicho punto; por consiguiente cualquier conjunto compuesto de puntos de M carece de puntos de acumulación, por consiguiente cuando E solo contiene un número finito de puntos de P, E' que se compone exclusivamente de puntos de M carece de puntos de acumulación, y es por lo tanto un conjunto cerrado.

Vemos pues que el espacio que estamos considerando verifica igualmente la quinta condición de Riesz, y es por lo tanto un espacio accesible.

Recordemos las siguientes definiciones: un conjunto E se dice *separable* si existe un conjunto numerable N de puntos de E tal que todo elemento de E es punto de N o punto de acumulación de N. Un conjunto E se dice *perfectamente separable* si existe una familia numerable de conjuntos tal que, cualquiera que sea el punto a de E, puedan tomarse, sin alterar la definición adoptada de acumulación, como entornos de a conjuntos pertenecientes a la familia, o lo que es lo mismo cuando se puede conseguir que el conjunto de los entornos de todos los puntos de E forme una familia numerable.

En el espacio que estamos estudiando se verifica que el derivado P' del conjunto numerable P es el conjunto $M+N$, luego $P+P'=M+N+P$ es el conjunto de todos los puntos del espacio, y por lo tanto el *espacio es separable.*

Supongamos ahora una familia de entornos $\{W\}$ del espacio equivalente a la familia $\{V\}$ definida anteriormente; ya sabemos que es condición necesaria y suficiente para la equivalencia que todo entorno de $\{V\}$ contenga un entorno de $\{W\}$, y recíprocamente.

Sea a un punto de M, existirá un entorno $W_1(a)$ de la nueva familia contenido en $V_1(a)$ y un entorno $V_p(a)$ contenido en $W_1(a)$. El entorno $W_1(a)$ contendrá entonces puntos del conjunto N de la misma abscisa que a y no contendrá ningún punto del conjunto N de abscisa diferente de la de a. Podemos pues, a cada punto $(a, b, \ldots)$ del conjunto M (es decir del eje OX) hacerle corresponder un entorno $(W_1(a), W_1(b), \ldots)$ de manera tal que dos entornos correspondientes a puntos distintos no tengan ningún punto común, luego de cualquier familia de entornos $\{W\}$ equivalente a la dada $\{V\}$ podemos siempre extraer un conjunto de potencia del continuo de entornos diferentes, luego ninguna familia equivalente a la dada puede ser numerable, y por lo tanto el espacio no es *perfectamente separable.* Hemos por lo tanto construído un espacio que cumple todas las condiciones que nos proponíamos es decir: *accesible, no numerable, separable y no perfectamente separable.*

II

Dijimos al principio que habíamos encontrado una solución al tema propuesto (salvo la condición de accesibilidad) bajo la forma de un espacio D_0. Estos espacios estudiados por primera vez por Rey Pastor (²), son espacios en los que se define una distancia que se distingue de la ordinaria de los espacios métricos en que no es simétrica y en que puede ser nula la distancia entre puntos distintos. Esta última propiedad tiene por consecuencia que los espacios D_0, que verifican las condiciones 1.ª, 2.ª y 5.ª de Riesz, no tengan por qué verificar la condición 3.ª, y por lo tanto, en general, no serán accesibles. Si a la distancia entre dos puntos se la obliga a ser nula únicamente cuando los puntos coinciden, pero no se la obliga a ser simétrica, obtenemos los espacios cuasimétricos de Wilson (³), que verifican entonces la tercera condición de Riesz, y son, por lo tanto, accesibles.

El objeto de esta segunda parte es ver que el espacio estudiado en la primera puede considerarse como un espacio cuasimétrico. Para ello definiremos, en el conjunto de puntos que sirve de base al espacio dado, la distancia de un punto a sí mismo como nula y la distancia entre dos puntos distintos mediante las siguientes igualdades:

$$ab = 1 \quad aA_r = \frac{1}{r} \quad aB_r = 1 \quad a\alpha_n = \frac{1}{n} \quad A_r a = \frac{1}{r} \quad A_r b = 1$$

$$A_r B_n = 1 \quad A_r A_s = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \quad A_r \alpha_n = \frac{1}{n}$$

$$\alpha_n a = 1 \quad \alpha_n A_r = 1 \quad \alpha_r \alpha_s = 1.$$

(en estas igualdades r puede ser igual o distinto de n, pero es siempre r distinto de s).

Basta observar esta definición para ver que la distancia entre dos puntos distintos es positiva, se anula cuando los dos

(²) *Espacios D_0*. Revista de Matemáticas y Física Teórica de la Universidad de Tucumán, vol. I (1940), pág. 105.

(³) *On quasi-metric spaces*. American Journal of Mathematics, vol. 53 (1931), pág. 675.

puntos están confundidos, y solo entonces, y no es simétrica. Para ver que el espacio es cuasimétrico habrá que demostrar que esta distancia tiene también la propiedad triangular $xy \leqq xz + zy$. Para ello consideraremos todos los casos posibles y tendremos en cuenta que, como ninguna distancia es superior a la unidad, bastará que aparezca en el segundo miembro un sumando igual a la unidad para que la desigualdad quede satisfecha.

Si tomamos como par xy el par ab, el tercer elemento z puede ser c, A_r, B_r, C_r, o α_n y en todos los casos las sumas

$$ac + cb \quad aA_r + A_r b \quad aB_r + B_r b \quad aC_r + C_r b \quad a\alpha_n + \alpha_n b$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Si tomamos como par xy el par aA_r el tercer elemento z puede ser $b, A_s\,(s \neq r), B_n$ o α_n. Las sumas

$$ab + bA_r \quad aB_n + B_n A_r \quad a\alpha_n + \alpha_n A_r$$

tienen un sumando igual a la unidad, y por otra parte se verifica:

$$aA_s + A_s A_r = \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} > \frac{1}{r} = aA_r$$

Si tomamos como par xy el par aB_r, el tercer elemento z puede ser $b, c, A_n, B_s\,(r \neq s), C_n$ o α_n. Siempre las sumas

$$ab + bB_r \quad ac + cB_r \quad aA_n + A_n B_r$$
$$aB_s + B_s B_r \quad aC_n + C_n B_r \quad a\alpha_n + \alpha_n B_r$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Si tomamos como par xy el par $a\alpha_n$ el tercer elemento z puede ser b, A_r, B_r o $\alpha_p\,(p \neq n)$. Las sumas

$$ab + b\alpha_n \quad aB_r + B_r\alpha_n \quad a\alpha_p + \alpha_p\alpha_n$$

tienen un sumando igual a la unidad. Por otra parte se verifica que:

$$aA_r + A_r\alpha_n = \frac{1}{r} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} = a\alpha_n.$$

Si tomamos como par xy el par $A_r a$ el tercer elemento puede ser $b, A_s\,(r \neq s), B_n$ o α_n. Las sumas

$$A_r\,b + b\,a \quad A_r\,B_n + B_n\,a \quad A_r\,\alpha_n + \alpha_n\,a$$

tienen un sumando igual a la unidad. Por otra parte se tiene

$$A_r\,A_s + A_s\,a = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} > \frac{1}{r} = A_r\,a.$$

Si tomamos como primer par el $A_r\,b$ el tercer elemento puede ser $a, c, A_s\,(r \neq s), B_n, C_n$ o α_n. Siempre las sumas

$$A_r\,a + a\,b \quad A_p\,c + c\,b \quad A_r\,A_s + A_s\,b$$
$$A_r\,B_n + B_n\,b \quad A_r\,C_n + C_n\,b \quad A_r\,\alpha_n + \alpha_n\,b$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Si tomamos como par inicial el $A_r\,B_n$ el tercer elemento puede ser $a, b, c, A_s\,(r \neq s), B_m\,(m \neq n), C_p$ o α_p, y siempre las sumas

$$A_r\,a + a\,B_n \quad A_r\,b + b\,B_n \quad A_r\,c + c\,B_n \quad A_r\,A_s + A_s\,B_n$$
$$A_r\,B_m + B_m\,B_n \quad A_r\,C_p + C_p\,B_n \quad A_r\,\alpha_p + \alpha_p\,B_n$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Si tomamos como par xy el par $A_r\,A_m\,(r \neq m)$, el tercer elemento puede ser $a, b, A_s\,(s \neq r$ y $\neq m), B_p$ o α_n. Las sumas

$$A_r\,b + b\,A_m \quad A_r\,B_n + B_n\,A_m \quad A_r\,\alpha_n + \alpha_n\,A_m$$

tienen un sumando igual a la unidad. Por otra parte tenemos:

$$A_r\,a + a\,A_m = \frac{1}{r} + \frac{1}{m} = A_r\,A_m$$

$$A_r\,A_s + A_s\,A_m = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{m} > \frac{1}{r} + \frac{1}{m} = A_r\,A_m.$$

Si tomamos como par xy el par $A_r\,\alpha_n$ el tercer elemento puede ser $a, b, A_s\,(r \neq s), B_m$ o $\alpha_p\,(p \neq n)$. Las sumas

$$A_r\,b + b\,\alpha_n \quad A_r\,B_m + B_m\,\alpha_n \quad A_r\,\alpha_p + \alpha_p\,\alpha_n$$

tienen un sumando igual a la unidad; por otra parte se verifica que:

$$A_r\,a + a\,\alpha_n = \frac{1}{r} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} = A_r\,\alpha_n$$

$$A_r\,A_s + A_s\,\alpha_n = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} = A_r\,\alpha_n\,.$$

Si tomamos como par xy el par $\alpha_n\,a$ el tercer elemento puede ser b, A_r, B_r o $\alpha_p\,(p \neq n)$, y en todo caso las sumas

$$\alpha_n\,b + b\,a \quad \alpha_n\,A_r + A_r\,a \quad \alpha_n\,B_r + B_r\,a \quad \alpha_n\,\alpha_p + \alpha_p\,a$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Si tomamos como par xy el par $\alpha_n\,A_r$ el tercer elemento puede ser $a, b, A_s\,(r \neq s), B_n$ o $\alpha_p\,(p \neq n)$ y siempre las sumas

$$\alpha_n\,a + a\,A_r \quad \alpha_n\,b + b\,A_r \quad \alpha_n\,A_s + A_s\,A_r$$
$$\alpha_n\,B_n + B_n\,A_r \quad \alpha_n\,\alpha_p + \alpha_p\,A_r$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Finalmente si tomamos como par inicial $\alpha_m\,\alpha_n\,(m \neq n)$, el tercer elemento puede ser a, A_r o $\alpha_q\,(q \neq m$ y $\neq n)$; en todos los casos las sumas

$$\alpha_m\,a + a\,\alpha_n \quad \alpha_m\,A_r + A_r\,\alpha_n \quad \alpha_m\,\alpha_p + \alpha_p\,\alpha_n$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Hemos considerado todos los casos posibles, luego ha quedado demostrado que *la distancia verifica la propiedad triangular.*

Una vez definida la distancia, la acumulación se establece mediante distancias suficientemente pequeñas, pero como aquí la distancia no es simétrica, hay que especificar más la definición. Nosotros diremos que un punto η es de acumulación de un conjunto E, cuando cualquiera que sea ε existen puntos λ del conjunto E tales que $\eta\,\lambda < \varepsilon$ (las otras definiciones posibles serían $\lambda\,\eta < \varepsilon$ o bien la verificación de ambas desigualdades).

Esta definición nos conduce a una familia de entornos equivalente a la dada; en efecto: dados los entornos primitivos $V(\alpha_p), V_n(A_s)$ y $V_n(a)$ tomando respectivamente $\varepsilon < 1, \varepsilon < \frac{1}{n}$ y $< \frac{1}{s}$, $\varepsilon < \frac{1}{n}$ obtenemos entornos definidos por distancias que están contenidos en los anteriores, y recíprocamente dados los entornos definidos por distancias

$$W_1(a)\,[a\lambda < h_1] \quad W_2(A_n)\,[A_n\lambda < h_2] \quad W(\alpha_r)\,[\alpha_r\lambda < h_3]$$

los entornos $V_m(a)$, $V_p(A_n)$, $V(\alpha_r)$, donde es $m > \frac{1}{h_1}$, $n > \frac{1}{h_2}$ están contenidos en ellos.

Queda pues establecido que el espacio que hemos definido es un espacio cuasimétrico, y esto nos prueba también que: *en los espacios cuasimétricos, al contrario de lo que sucede en los métricos, un conjunto puede ser separable sin ser perfectamente separable.*

Como ya hemos dicho los espacios cuasimétricos forman una clase intermedia entre los espacios D_0 y los métricos; son menos generales que los D_0 por que se impone la condición de que la distancia entre puntos distintos no puede ser nula, y son más generales que los métricos porque la distancia no está obligada a ser simétrica. Puede igualmente considerarse otra clase intermedia de espacios, aquella en que la distancia está obligada a ser simétrica, pero puede ser nula la distancia entre dos puntos distintos.

Se puede fácilmente ver que: *en esta última clase de espacios todo conjunto separable es también perfectamente separable* ya que se puede aplicar la misma demostración que se usa para demostrar esta propiedad en el caso de los espacios métricos; es decir, se forma la familia total numerable de entornos con las esferas cuyos centros son los puntos N y de radios 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \ldots$. Esta misma demostración es aplicable a los espacios D_0 en que se define la acumulación haciendo ambas distancias suficientemente pequeñas.

Nota: Observemos que el espacio anterior no es un espacio de Hausdorff, ya que los entornos de dos puntos cualesquiera del conjunto $M + N$ contienen siempre puntos comunes del conjunto P.

Puede por tanto plantearse como un tema nuevo el de dar un ejemplo de espacio de Hausdorff no numerable, separable y no perfectamente separable, o demostrar la imposibilidad de su existencia.

(Recibido el 17 de marzo de 1945).

ACLARACION SOBRE UNA OMISION

En el número anterior de esta Revista apareció entre las comunicaciones a la tercera reunión de la Asociación Física Argentina, de agosto de 1944, un resumen de mi trabajo «Los tricomplejos antoidales y las funciones de estas variables», trabajo que por deferencia del Dr. Rey Pastor expuse en la sesión de la U. M. A. del 18 de septiembre de 1944. En esta reunión tuve noticias de la existencia de un trabajo muy anterior del Prof. Antonio Valeiras, conexo con el nuestro, y que conocí más tarde por deferencia del autor (1).

Existen concordancias entre ambos trabajos, aunque la idea inicial es diversa. El mío es un intento de generalización del plano de Gauss al espacio de tres dimensiones, para lo cual es necesario introducir elementos que se corresponden con los de la teoría de las variables complejas y sus funciones, partiendo de la idea de poner en correspondencia los 6 ejes del espacio de tres dimensiones con las raíces de $\sqrt[6]{1}$, en la misma forma que lo están los 4 ejes del plano complejo con las raíces de $\sqrt[4]{1}$ (2).

Los hipercomplejos los introdujo el Prof. Valeiras en su trabajo, para el tratamiento de una ecuación diferencial de P. Humbert (3), que da como generalización para el tercer orden de la ecuación de Laplace en dos dimensiones.

Sin embargo, las tablas de multiplicación de las unidades de los tricomplejos que utilizo y las empleadas mucho antes por el Prof. Valeiras son equivalentes, mediante la transformación

$$1 = u_0, \quad -\varepsilon_1 = u_1, \quad \varepsilon_2 = u_2 \tag{1}$$

La existencia de la transformación (1), conduce a los re-

(1) Antonio Valeiras, *Sobre las funciones monógenas de una clase especial de variables hipercomplejas.* Publicaciones del Círculo Matemático del Inst. Nac. del Profesorado Secundario. Nº 5.

(2) Ver la publicación in extenso en Cont. de la Fac. de Cien. Fisicom. de la Univ. de La Plata. Vol. III, Nº 4, p. 413, 1944.

(3) P. Humbert. *Sur les potentiels du troisième ordre,* Journ. de Math. p. et appl., 1929.

sultados comunes de ambos trabajos y reconozco, por ello, *el mérito y la prioridad* de la labor interesante del Prof. Valeiras que, además, contiene resultados no alcanzados por mí, como el estudio de las funciones log w y e^{w} (A. Valeiras, p. 33), la extensión de los sistemas cuaternarios y la aplicación de de éstos a la ecuación de Ghermanesco y Devisme (A. Valeiras, p. 44) y otra cantidad de resultados. Lo que está contenido en mi trabajo y no se encuentra en cambio en el del Prof. Valeiras, son las propiedades integrales de las funciones que llamo antoidales (introducidas también sin esta denominación, por el Prof. Valeiras), y las consecuencias que de ellas se derivan. Me siento agradecido hacia el Prof. Valeiras por hacerme conocer su trabajo, y complacido hago esta aclaración, que por descuido omití al entregar las pruebas para la publicación in extenso, en momentos en que ya conocía el trabajo en cuestión.

José A. Balseiro

BIBLIOGRAFIA

Cristóbal de Losada y Puga. — *Curso de Análisis Matemático*, tomo I, Universidad Católica del Perú, Lima 1945, 632 páginas.

El número de monografías, memorias y tratados de matemáticas superiores publicadas en lengua castellana, ya abundante en cantidad y valioso en calidad, se ve enriquecido por la publicación de esta obra del Prof. Losada y Puga, tomo primero al que han de seguir otros dos para formar un completo ''Curso de Análisis'' con el significado que a este título han dado los clásicos tratadistas franceses (Jordan, Picard, Goursat). El solo hecho de la publicación de este primer volumen, con el esfuerzo editorial que significa el logro de una tan excelente presentación e impresión como la conseguida, y de existir el proyecto de los volúmenes futuros, constituye una nueva y halagüeña prueba del elevado nivel alcanzado y de la extensión del interés despertado por los estudios de matemáticas superiores en los países americanos de habla castellana.

Veamos, con la rapidez a que obliga una nota bibliográfica, el contenido de la obra.

El Libro I, titulado ''Introducción'', contiene 4 capítulos: De los números, Variables y funciones (exposición elemental), Límites, Variables y funciones (exposición complementaria). Empieza por exponer las ideas elementales de la teoría de conjuntos para llegar a la definición del número natural, parte en la cual, como el Autor reconoce, sigue muy de cerca la exposición de Rey Pastor en su ''Análisis algebraico''. Se definen a continuación y sucesivamente los números racionales, reales y complejos, con las respectivas operaciones entre ellos. Pasa luego al estudio del concepto de función, con numerosos ejemplos y representaciones gráficas, siguiendo con la definición de límite y sus propiedades. Finalmente se estudia con toda claridad el concepto de continuidad y principales propiedades de las funciones continuas.

El Libro II, titulado ''Diferenciación'', contiene 10 capítulos, dedicados a la derivación y diferenciación de funciones de una y mas variables, aplicaciones de la derivada, determinantes funcionales y cambios de variable.

El Libro III, titulado ''Integrales y funciones primitivas'' se subdivide en 5 capítulos: Integrales definidas e indefinidas, Investigación de las funciones primitivas (procedimientos de integración), Integrales definidas, Investigación de las funciones primitivas (aplicación de los procedimientos de integración), Aplicaciones geométricas de la integración. En la parte de integrales definidas se dan las definiciones de las integrales de Stieltjes y de Lebesgue (aqui cabe mencionar un pequeño lapsus, pues en la pág. 383 llama *límite inferior* a lo que anteriormente, pág. 80, llamó *extremo inferior*, error sin importancia, pues el sentido, que es lo interesante, se comprende bien, pero que puede ocasionar confusión al estudiante). Al tratar de los métodos de integración se estudian con mucho detalle y claridad las integrales elípticas, con su reducción a las tres formas típicas de Legendre. En la parte de aplicaciones geométricas se tratan muchos y bien elegidos ejemplos de áreas y volúmenes, unicamente los que pueden calcularse por integrales simples, estudiando finalmente con todo detalle la rectificación de curvas planas, dando el clásico teorema de Jordan sobre las condiciones necesarias y suficientes para que una curva plana sea rectificable.

El Libro IV y último se titula ''Iniciación en el estudio de las ecuaciones diferenciales'' y comprende 3 capítulos: Generalidades, Ecuaciones de primer orden y de primer grado, Ecuaciones diferenciales lineales, todos ellos con numerosos ejemplos, la mayoría tomados de atrayentes cuestiones de física o química.

Termina el volumen con unas tablas numéricas que pueden ser útiles para la resolución de algunos problemas planteados en el texto.

Una característica predominante en la obra, que realza su valor dado su destino a estudiantes y a profesionales que en algún momento necesiten recordar conocimientos adquiridos y semi olvidados, está manifestada por el Autor en el prólogo: ''No me he propuesto, como se comprenderá por el tamaño del libro, escribir una obra concisa: me he propuesto escribir una obra clara''. En tal sentido, efectivamente, todos los conceptos, definiciones y teoremas están expuestos con todo lujo de detalles, abundantes y claras figuras y bonitos y bien desarrollados ejemplos. Al final de cada capítulo trae una colección de ejercioics, no resueltos, muchos de ellos clásicos, pero bien seleccionados y muy útiles para el lector que quiera comprender bien la teoría correspondiente.

Cada vez que se introduce un concepto o que aparece un nombre de matemático ilustre, contiene, acertadamente, una cuidada nota histórica o biográfica.

En el prólogo se da una indicación para la lectura del libro según la preparación o el fin perseguido por el lector, repartiendo los capítulos en unos más elementales y otros complementarios, los primeros de los cuales pueden estudiarse independientemente de los segundos en una primera lectura o un primer curso. Respecto el contenido de la obra, como se ve por el breve enunciado de sus capítulos que hemos dado, será interesante esperar los volúmenes sucesivos para tener un tratado completo de Análisis. La elección y ordenación de las materias a tratar en el primer volumen o en los siguientes depende, en gran parte, de los planes de estudio de la Facultad a cuyos alumnos vaya principalmente dirigido: si este primer volumen debiera corresponder a un curso de corte clásico de cálculo infinitesimal, para muchos planes de estudio se notarían a faltar los capítulos de series, integrales curvilíneas, integrales dobles, aplicaciones geométricas del cálculo, que el Autor ha reservado para los volumenes posteriores.

En resumen creemos que la obra, de excelente presentación y correctísima impresión matemática, ha de ser recibida con agrado por el público matemático y de gran utilidad para los estudiantes.

L. A. SANTALÓ

CRONICA

LA QUINTA REUNION DE LA ASOCIACION FISICA ARGENTINA (*)

La quinta reunión de la Asociación Física Argentina tuvo lugar del 31 de Marzo al 2 de Abril de 1945 en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y en el Observatorio Astronómico de Córdoba.

La reunión fué inaugurada por el Presidente de la A. F. A., Dr. ENRIQUE GAVIOLA el día 31 de Marzo en el Salón de Actos de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, en presencia de las altas autoridades de la Intervención Federal de la Provincia de Córdoba y de los representantes de los Institutos de Física de las Universidades de Buenos Aires, La Plata y Tucumán.

Fueron elegidos como autoridades de la reunión: Presidente: Dr. ENRIQUE GAVIOLA (Córdoba), Vicepresidentes: Dr. HÉCTOR ISNARDI (La Plata), Dr. JOSÉ WÜRSCHMIDT (Tucumán), Secretario: Dr. GUIDO BECK (Córdoba)

En las cuatro sesiones de la reunión se expusieron: una discusión sobre la enseñanza universitaria, (el texto completo de la cual será publicado en la revista Ciencia e Investigación): tres informes y 16 comunicaciones.

(*) La numeración adoptada para las reuniones de la AFA incluye las tres reuniones del Núcleo de Física y el Congreso de Física y Astronomía de 1942 que tuvo lugar con motivo de la inauguración de la Estación Astrofísica de Bosque Alegre.

El director del Departamento de Física de la Universidad de Tucumán, Prof. Dr. JOSÉ WÜRSCHMIDT informó sobre la formación de una sección de la AFA en Tucumán y la reunión aprobó su informe, eligiendo al Dr. JOSÉ WÜRSCHMIDT, Secretario Local de la AFA para Tucumán. Además, la quinta reunión aprobó tres resoluciones cuyo texto reproducimos más abajo.

Varias reuniones sociales y una excursión a la Estación Astrofísica de Bosque Alegre permitieron a los participantes cambiar ideas sobre cuestiones relacionadas con sus trabajos y con la futura organización de las instituciones científicas.

Sigue el programa de la quinta reunión:

Sesión del 31 de Marzo (tarde) Preside: Dr. Enrique Gaviola

Discusión sobre la enseñanza universitaria:

1º Ernesto Galloni (Buenos Aires): Necesidades de la industria.
2º Enrique Gaviola (Córdoba): Enseñanza e Investigación.

Orden del día:

1º Informe sobre las actividades de la AFA, Ernesto Galloni.
2º Informe sobre la formación de la sección de Tucumán, José Würschmidt.
3º Propuesta de temas para informes futuros, Guido Beck.
4º Propuesta de resoluciones sobre
  a) La forma de los programas de las reuniones de la AFA.
  b) Noticias sobre resultados de investigación en la prensa diaria.
  c) La fundación de la revista "Ciencia e Investigación".

Guido Beck

Informes:

1º Ricardo Platzeck (Córdoba): El informe del Observatorio de Mount Wilson, 1942/43.

Sesión del 1º de Abril (mañana) Preside: Dr. Enrique Gaviola

Informes:

2º José Würschmidt (Tucumán): Efecto Doppler, aberración y presión de luz.
3º Fidel Alsina Fuertes (La Plata): El estado actual del estudio de la Supraconductividad, I.

Sesión del 1º de Abril (tarde) Preside: Dr. Enrique Gaviola

Comunicaciones:

1º Godofredo García (Lima, Perú): Sobre el estado actual del sistema solar. El problema de los tres cuerpos siendo el sistema disipativo. (Se leyó el título).

2º Enrique Gaviola (Córdoba): El espectro de Eta Carinae.
3º Jorge Bobone (Córdoba): El asteroide Argentina.
4º Martín Dartayet (Córdoba): Búsqueda de enanas blancas.
5º Alfredo Völsch (Córdoba): La zona de totalidad del eclipse de Sol del 20 de Mayo de 1947.
6º Simón Gershnik (La Plata): Criterio para interpretar sismogramas.
7º Simón Gershanik (La Plata): Métodos para estimar la profundidad de focos sísmicos anormales en base a una sola estación.

Sesión del 2 de Abril (mañana) Preside: Dr. Enrique Gaviola

Comunicaciones:

8º Emilio L. Díaz (Buenos Aires): Posibilidades de establecer estaciones metereológicas en el Pacífico Sur. (Se leyó el título).
9º Guido Beck (Córdoba): Sobre la polarización del vacío por un campo exterior.
10º Ricardo Platzeck (Córdoba): Equivalencia del método del eiconal con el método matricial en la teoría de los errores ópticos.
11º Mario Bunge (Buenos Aires): Choque entre protones y neutrones.
12º José Balseiro (La Plata): Aplicación de los tricomplejos antoidales a potencial de tercer grado.
13º José Balseiro y Antonio Rodríguez (La Plata): Estudio roentgenográfico y medida de la conductividad magneto-eléctrica de láminas de Bismuto.
14º Juan J. R. Engel (La Plata): Análisis roentgenográfico del fenómeno de vulcanización del aceite de lino. (Se leyó el título).
15º Carlos Tomassoni (La Plata): Espectrografía de sangre. (Se leyó el título).
16º Jacobo M. Goldschvartz (Buenos Aires): Sobre la recuperación del carbón en los transmisores telefónicos.

Resoluciones aprobadas por la Quinta Reunión de la Asociación Física Argentina

1º La Asociación Física Argentina eligió en su sesión del 31 de Marzo de 1945 de la Quinta Reunión de la AFA como *Secretario Local de Tucumán* al

Prof. Dr. José Würschmidt, Laprida 765, Tucumán.

El Dr. José Würschmidt formará, de aquí en adelante, parte de la Comisión Directiva de la AFA.

2º La Asociación Física Argentina aprobó en su sesión del 31 de Marzo de 1945 de la Quinta Reunión de la AFA la

Resolución I

"La *Asociación Física Argentina* establece la forma siguiente de los programas de sus reuniones futuras:

Asociación Física Argentina

.............a Reunión

Lugar y Fecha.

....

....

Firma del Secretario Local''.

3º La Asociación Física Argentina aprobó en su sesión del 31 de Marzo de 1945 de la Quinta Reunión de la AFA la

RESOLUCIÓN II

''La *Asociación Física Argentina,* teniendo en cuenta la importancia de informaciones exactas para el público sobre acontecimientos notables en su rama particular, pone a sus secretarios a la disposición de la prensa diaria con respecto a preguntas sobre la exactitud de noticias relativas a resultados de investigaciones en física''.

Se entiende, que los servicios serán gratuitos.

4º La Asociación Física Argentina aprobó en su sesión del 31 de Marzo de 1945 de la Quinta Reunión de la AFA la

RESOLUCIÓN III

''La *Asociación Física Argentina* toma nota, con suma satisfacción, de la carta de fecha 4 de octubre de 1944 dirigida a su presidente sobre la fundación de la Revista *Ciencia e Investigación* y recomienda a sus miembros una participación activa en esta revista''.

Córdoba, 31 de marzo de 1945.

El Secretario:	El Presidente:
Fdo.: GUIDO BECK	Fdo.: ENRIQUE GAVIOLA

VARIA

19. Leibniz sostenía que, por misteriosas que pudieran parecer, existían, en realidad, cosas como las cantidades infinitamente pequeñas, y, por supuesto, números infinitamente pequeños que les correspondieran. El lenguaje y las ideas de Newton eran más modernos, pero no logró explicar el asunto con tanta claridad como para que no resultara evidentemente una explicación de las ideas de Leibniz en lenguaje poco menos que indirecto. La verdadera explicación del tema fué dada por primera vez por Weierstrass y la Escuela Berlinesa de matemáticos, hacia la mitad del siglo XIX. Pero desde Leibniz a Weierstrass

se había desarrollado una copiosa literatura alrededor de estas misteriosas cantidades infinitamente pequeñas que los matemáticos habían descubierto y la filosofía trataba de explicar. Algunos filósofos, por ejemplo el obispo Berkeley, negaron correctamente la validez de toda la idea, aunque por razones diferentes de las que aquí se indican. Pero quedaba el hecho curioso de que, a pesar de todas las críticas sobre el fundamento de la cuestión, no podía haber duda de que el procedimiento matemático era sustancialmente correcto. En realidad, el tema era correctó, aunque las explicaciones eran desacertadas. Es esta posibilidad de estar en lo cierto, bien que con explicaciones enteramente incorrectas acerca de lo que se hace, la que da lugar tan frecuentemente a la crítica exterior —que hasta puede paralizar la investigación de un método— tan singularmente estéril y fútil para el progreso de la ciencia. El sentido adiestrado y el sentido de la curiosidad, debidos al hecho de que evidentemente se está llegando a algo, son guías mucho más seguras. De todos modos, el efecto general del éxito del Cálculo Diferencial fué engendrar una gran cantidad de mala filosofía centralizada alrededor de la idea de lo infinitamente pequeño. Pueden aun encontrarse vestigios de esta elocuencia en las explicaciones de muchos libros de texto elementales de Matemática sobre el Cálculo Diferencial. Puede afirmarse, con seguridad, que cuando un autor matemático o filosófico escribe con brumosa profundidad, está diciendo disparates.

A. N. WHITEHEAD. *Introducción a las matemáticas*