Volumen XI Número 1

REVISTA
DE LA
UNION MATEMATICA ARGENTINA

(Miembro del patronato de la Mathematical Reviews)

ORGANO DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

REDACTADA por

J. Babini (Director), J. Rey Pastor, L. A. Santaló y E. Gaviola (Delegado de la A. F. A.)

MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. Babini (SantaFe) (fundador). — M. Balanzat (San Luis). — J. Barral Souto (B. Aires) (fundador) — C. A. Bula (Rosario) (fundador). — E. Corominas (Mendoza). — E. Chichizola (Rosario). — C. Dieulefait (Rosario) (fundador). — A. Durañona y Vedia (B. Aires). — Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales (B. Aires) (fundador). — Facultad de Ciencias Matemáticas (Rosario) (fundador). Facultad de Química Industrial (Santa Fe) (fundador). — Y. Frenkel (B. Aires). — E. Gaspar (Rosario) (Fundador). — F. L. Gaspar (Rosario) (fundador). — J. Giannone (Rosario (fundador). — A. González Domínguez (Buenos Aires) (fundador). — J. González Gale (Buenos Aires) (fundador). — M. Guitarte (Buenos Aires) (fundador). — W. S. Hill (Montevideo) (fundador). — C. Isella (Rosario) (fundador). — H. Magliano (La Plata). — Observatorio Astronómico (La Plata). — J. Olguin (Rosario) (fundador). — P. Pí Calleja (San Juan). — E. R. Raimondi (Buenos Aires) (fundador). — J. E. Reynal (Buenos Aires). — J. Rey Pastor (Buenos Aires) (fundador). — E. L. Samatán (Buenos Aires) (fundador). — L. A. Santaló (Rosario) (fundador). — J. Sortheix (Tucumán) (fundador). — D. T. A. de Speluzzi (Buenos Aires) (fundador). — E. Terradas (La Plata) (fundador). — F. Toranzos (La Plata). — E. H. Zarantonello (La Plata).

BUENOS AIRES
1945

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de $ 5. — m/n. mensuales o de $ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de $ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de $ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Priére d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Dr. MÁXIMO VALENTINUZZI
PERÚ 222, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Para ingresar a la Asociación Física Argentina debe abonarse una cuota mensual de $ 5.— m/n. Los estudiantes de física y de astronomía pagarán una cuota mensual de $ 1.— m/n.

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

ORGANO DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

VOLUMEN XI
1945 - 1946

BUENOS AIRES
1945

CENTENARIO DE LOS CUATERNIOS

El número de febrero del corriente año 1945, de los Proceedings of the Irish Academy *está consagrado al memorable acontecimiento de la invención de los cuaternios o cuaterniones de Hamilton. Fué en la sesión de 8 de noviembre de 1843 de esta misma benemérita sociedad científica en la que William Rowan Hamilton presentó su comunicación famosa, seguida de varias otras hasta que en 1847 publicó su exposición sistemática, que tan honda repercusión tuvo en el progreso de la Física, especialmente en los países de habla inglesa. El algoritmo que para los físicos ha sido poderoso instrumento analítico y para los matemáticos tema de investigación desinteresada como tantos otros sistemas de hipercomplejos, adquirió singular importancia a partir del descubrimiento de Frobenius: entre todos los sistemas, el único que conserva las propiedades aritméticas fundamentales, excepto la conmutatividad de la multiplicación, es el de los cuaternios.*

A partir de este descubrimiento de Frobenius la importancia de los cuaternios ha crecido sobremanera en el seno de la Aritmética universal y del Algebra abstracta; pues este algoritmo se convierte en la piedra clave que cierra el arco milenario cuya construcción inició Euclides. Para los físicos conserva todavía el valor instrumental que tuvo en su mente el genial creador; pero la trascendencia de sus ideas, que entonces parecían subversivas, como las de Grassmann, su espíritu gemelo, radica en el descubrimiento de un nuevo mundo de magnitudes que después amplió Cayley y perfeccionó entre otros el mismo Frobenius, hasta organizarse la moderna aritmética y cálculo infinitesimal de matrices, herramienta hoy eficacísima e indispensable para la elaboración de la nueva Física.

Contribuimos al merecido homenaje recordatorio reproduciendo de la mencionada revista dos artículos de acreditadas firmas, confirmatorios de las afirmaciones que acabamos de formular.

EL DESARROLLO DE LAS IDEAS EN EL DESCUBRIMIENTO DE LOS CUATERNIOS

por E. T. WHITTAKER
Universidad de Edinburgh

La primera comunicación sobre cuaternios, efectuada por Hamilton a la Academia, según figura en los «Proceedings» del 13 de Noviembre de 1943 daba la fórmula del producto de las unidades cuaterniónicas i, j, k, sin indicar cómo habían sido ellas obtenidas. La extensa memoria que apareció cuatro años más tarde en el «Transactions», estaba encabezada «Ver 13 de Noviembre de 1843», pero su publicación debe ser posterior, porque en Julio de 1846 Hamilton declaró que reservaba para las Transactions de la Real Academia Irlandesa, un informe sistemático y más completo de sus investigaciones en el tema; y en la memoria misma menciona que algunas páginas de ella habían sido publicadas en Junio de 1847.

No hay, entonces seguridad de que el método de exposición adoptado en esa publicación represente precisamente el desarrollo de sus ideas. En ese sentido, dependemos, para informarnos, de otras fuentes, particularmente la «Carta a John T. Graves, Esq.», que fué publicada en el Philosophical Magazine en Diciembre de 1844, fechada con 17 de Octubre de 1843 — el día siguiente al verdadero descubrimiento — y el extenso prólogo del «Lectures on Quaternions», con fecha de Junio de 1853, casi diez años después; conjuntamente con las indicaciones dadas en la «Vida de Hamilton» de Grave, en una comunicación efectuada a la Academia el 11 de Noviembre de 1844, y en diferentes memorias.

Como, a primera vista no todo el material parece armonizar muy bien con el resto, y habiendo varios claros históricos que deben ser completados mediante conjeturas, quizá quede justificado, en ocasión del centenario, el intento de un esbozo del desarrollo de las ideas de Hamilton.

La memoria del Transactions de 1848 dice que «respecto de los cuaternios, la investigación... podía ser considerada, al menos en un primer aspecto, una continuación de las especulaciones sobre pares algebraicos..., que fueron comunicadas primeramente a la Real Academia Irlandesa en Noviembre de 1833, y publicado en 1835, en el décimo séptimo volumen de sus Transactions». Esto último es una disertación algebraica, en la que, p. ej., el número complejo $a + b\sqrt{-1}$ es considerado como un par de números (a, b) con la propiedad

$$(b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2,\ b_2 a_1 + b_1 a_2).$$

La memoria de 1848 siguió a esto en la introducción de los cuaternios en forma puramente algebráica, definiendo las unidades i, j, k, por medio de substituciones. Pero, evidentemente, éste no ha sido el camino por el cual han sido descubiertos. En 1844 Hamilton expresó a la Academia que lo que originariamente lo condujo a concebir su teoría de los cuaternios... fué el deseo de formarse a sí mismo una concepción clara... de un cuarto proporcional a tres líneas rectangulares cuando se tenía en cuenta sus direcciones; como Mr. Warner y el Dr. Peacock mostraron cómo se concibe y expresa el cuarto proporcional a tres líneas cualesquiera de un plano, que poseen dirección». «La primera conjetura», dijo, «que sobre tripletes geométricos, hallé anotado entre mis papeles (hacia 1830) fué, que mientras las líneas en el espacio podían ser sumadas siguiendo las mismas reglas que en el plano, debían poder ser multiplicadas multiplicando sus longitudes, y sumando sus ángulos polares. En el método conocido por mí entonces como de Mr. Warren, si escribimos...».

Ahora bien: el Rev. John Warren A. M., que era Fellow y Tutor del Jesus College, de Cambridge, había publicado en 1828 el «Tratado de la representación geométrica de las raíces cuadradas de las cantidades negativas», que era, esencialmente, una descripción y elaboración de lo que hoy se llama diagrama de Argand, que representa el número complejo $a + b\sqrt{-1}$ por un vector cuyas componentes rectangulares sean (a, b). De todo esto, resulta evidente que Hamilton leyó éste trabajo, por lo menos, tan pronto como fué publicado, y que ya en 1830, tres años antes de la memoria sobre el álgebra, le fué sugerido el problema de la multiplicación conjunta de dos vectores en el espacio tridimensional. En 1834 y 1835 construyó una «teoría general de tripletes» y «ello fué, dijo, el motivo que entonces me indujo a asignar importancia especial a la consideración de los tripletes... Este fué el deseo de corregir en forma nueva y útil, o por lo menos interesante, los cálculos mediante la geometría, con alguna extensión nueva al espacio de tres dimensiones, de un método de construcción o representación empleado con éxito por Mr. Warren».

El problema estaba en la mente de los matemáticos contemporáneos y los hermanos Juan y Carlos Graves y Augusto De Morgan intentaron su solución. Pero fué Hamilton quien atacó el problema con éxito:

En la representación de Argand de un vector en un plano mediante un complejo ordinario, la multiplicación de los vectores está determinada por la fórmula algebraica:

$$(x+iy)\,(x'+iy')=X+iY$$

en la que

$$i^2=-1, \quad X=xx'-yy', \quad Y=xy'+x'y.$$

Ahora, la fórmula para la multiplicación de determinantes da

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & xx'-yy' \\ xx'-yy' & x'^2+y'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 \qquad (1)$$

o

$$(x^2+y^2)\,(x'^2+y'^2)=X^2+Y^2 \qquad (2)$$

así, $(x^2+y^2)^{1/2}$ es el módulo de multiplicación, es decir, la función que, en el producto, tiene el mismo valor que el producto de las correspondientes funciones de los factores.

En 1843 Hamilton, abandonando su notación anterior, propone representar el vector en el espacio tridimensional por $x+iy+jz$, donde i y j son entes, tales que

$$i^2=j^2=-1 \qquad (3)$$

quedando todavía indeterminadas todas sus demás propiedades.

Un segundo vector estaría representado por $x' + iy' + jz'$ y la manifiesta analogía de (1) es un caso del teorema de Cauchy sobre la multiplicación de dos disposiciones, especialmente,

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + x^2 & xx' - yy' - zz' \\ xx' - yy' - zz' & x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & -z \\ x' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}^2,$$

o,

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) =$$
$$(xx' - yy' - zz')^2 + (xy' + x'y)^2 + (xz' + x'z)^2 + (yz' - y'z)^2. \quad (4)$$

El primer miembro de esta ecuación es el producto de los cuadrados de los módulos de multiplicación de los dos vectores, pero el miembro de la derecha no contiene tres, sino cuatro cuadrados. Apoyándose en esto, Hamilton vió que las operaciones geométricas del espacio tridimensional requerían para su descripción, no tripletes, sino cuadrupletes; pues si consideramos, por ejemplo, la operación que efectuada sobre un vector α lo convierte en otro β vemos que para especificar esta operación, necesitamos conocer la relación de las longitudes de α y β el ángulo que forman, y el nodo y la inclinación del plano en el que yacen, es decir, en total cuatro números. De ahí que él estaba preparado para aceptar la ecuación (4), como la que da el módulo de multiplicación del producto de dos vectores.

Ahora tenemos, multiplicando,

$$(x + iy + jz)\,(x' + iy' + jz') = (xx' - yy' - zz') + i(xy' + x'y)$$
$$+ j(xz' + x'z) + ijyz' + jizy'. \quad (5)$$

Comparemos (5) con (4). De la (5) resulta que la ecuación del módulo de multiplicación de los dos vectores, cuyo primer miembro consiste en el producto $(x^2+y^2+z^2)$ $(x'^2+y'^2+z'^2)$ debe contener, en el otro miembro, el cuadrado de $(xx'-yy'-zz')$ el cuadrado de $(xy' + x'y)$, el cuadrado de $(xz' + x'z)$ y otro cuadrado que corresponde a los términos $ijyz' + jizy'$. Pero de la comparación con la (4), resulta que éste último cuadrado debe ser $(yz' - y'z)^2$; y para obtener ésto de $ijyz' + jizy'$, debe ser

$$ji = -ij.$$

El momento cumbre en la historia del simbolismo matemático, fué éste. Comenzó entonces un proceso creador que produjo, no solamente los cuaternios, sino todos los otros sistemas que rompieron con las viejas reglas; las matrices, de Cayley y Sylvester, la lógica simbólica de Boole, la *Ausdehnungslehre* de Grassmann, las díadas de Gibbs, y el álgebra de la mecánica cuántica de Heisenberg-Dirac.

Llamando k a ij, tenemos:

$$ij = k = -ji \tag{6}$$

y las ecuaciones (4) y (5) pueden ahora escribirse

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) = X^2+Y^2+Z^2+W^2 \tag{4a}$$

donde

$$(x+iy+jz)(x'+iy'+jz') = X+iY+jZ+kW.$$

De (3) y (6) podemos deducir inmediatamente las ecuaciones fundamentales

$$i^2=j^2=k^2=-1, \quad ij=k=-ji, \quad jk=i=-kj, \quad ki=j=-ik.$$

Ahora Hamilton introdujo una innovación, escribiendo el cuadrinomio

$$w+ix+jy+kz.$$

Durante un tiempo, pensó llamarlo *gramarismo*, pero prevaleció el nombre de *cuaternión*. El teorema de la multiplicación de los cuaternios resultaba de las ecuaciones (7), y la nueva ciencia estaba fundada.

Las dificultades de los tripletes, que durante tanto tiempo detuvieron a Hamilton, fueron resueltas por un camino completamente diferente por De Morgan, cuya «álgebra triple» no carece de interés. Como hemos visto, Hamilton estableció la condición de que el módulo de multiplicación del triplete $a+bi+cj$ debía ser $(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$. Pero un sistema de álgebra triple con ese módulo, es seguro que no puede existir, porque el problema de hallar tres cuadrados en el que entren simétricamente las letras acentuadas y las no acentuadas, y cuya suma sea igual a $(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)$, puede demostrarse que es equivalente al problema de hallar tres puntos sobre una esfera, cada uno de los cuales sea antípoda de los otros dos.

No obstante, no es necesario que el módulo sea una función simétrica de a, b, c, y De Morgan demostró que si se omite esta condición, pueden construirse sistemas de álgebra triple en las que todas las leyes del álgebra ordinaria se cumplen. Así, indicando el triplete con $a+bi+cj$, si convenimos que:

$$i^2=-j, \quad j^2=-i, \quad ij=ji=1,$$

la fórmula para el producto de dos tripletes es

$$\begin{aligned}(a+bi+cj)(a'+b'i+c'j) &= (bc'+cb'+aa') \\ &+ (ab'+ba'-cc')\,i + (ac'+ca'-bb')\,j.\end{aligned}$$

El módulo de multiplicación es $(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc)^{1/2}$; porque si

$$A=bc'+cb'+aa', \quad B=ab'+ba'-cc', \quad C=ac'+ca'-bb',$$

obtenemos la identidad

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc)&(a'^2+b'^2+c'^2+a'b'+a'c'-b'c') \\ &=A^2+B^2+C^2+AB+AC-BC.\end{aligned}$$

Las leyes conmutativa, asociativa y distributiva son válidas para este sistema. Otra propuesta de De Morgan fué conservar las propiedades conmutativa y distributiva, y suprimir la asociativa; esto ocurre, por ejemplo, con el triplete $a+bi+cj$ si establecemos que

$$i^2=j^2=ij=-1.$$

Como $(ii)j$ no es igual a $i(ij)$, la propiedad asociativa no rige. Ahora, debemos tener, como producto de dos tripletes

$$(a+bi+cj)\,(a'+b'i+c'j)=[aa'-(b+c)\,(b'+c')]$$
$$+(ab'+ba')i+(ac'+ca')j.$$

El módulo de multiplicación es:

$$[a^2+(b+c)^2]^{1/2}$$

porque tenemos idénticamente,

$$[a^2+(b+c)^2]\,[a'^2+(b'\pm c')^2]=[aa'-(b+c)\,(b'+c')]^2$$
$$+(ab'+ba'+ac'+ca')^2.$$

De Morgan discutió la interpretación geométrica de sus álgebras, pero no es tan simple como la de los cuaterniones. Además, los cuaterniones son fundamentalmente ventajosos, por ejemplo porque, como lo indica un teorema, descubierto mucho después, las únicas álgebras asociativas lineales en el campo de los números reales en que la división es unívocamente posible, son, el campo de los números reales, el campo de los números complejos ordinarios, y los cuaterniones reales. En la competencia de los sistemas, Hamilton sobrevivió como el mejor, y sus rivales, hoy, han sido olvidados.

CUATERNIOS Y MATRICES

por A. W. Conway
University College, Dublin

Introducción

El término matrices fué usado primerámente por Cayley en una publicación en francés en 1855, en el periódico de Crelle. Una exposición formal de las principales propiedades de las matrices fueron dadas por él mismo más tarde en el Philosophical Transactions de la Sociedad Real (1855). Muchas de sus propiedades eran ya conocidas por Hamilton. En 1853 dió a conocer en su «Lecturas sobre los Cuaterniones», el hecho de que una matriz satisface una cierta ecuación simbólica, en este caso una cúbica. Cayley lo probó para el caso de una cuadrática y una cúbica, y dedujo que debía cumplirse en general. C. S. Pierce (1881) expresó al cuaternión como una matriz, tal que $w + \alpha x + \beta y + \gamma z$ es equivalente a

$$\begin{pmatrix} w + ix & y - iz \\ -y - iz & w - ix \end{pmatrix}$$

es decir,

$$w\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pauli empleó éstas matrices años más tarde. Ya anteriormente, en 1878, Frobenius utilizó matrices cuadradas de 4.º orden que cumplían las leyes de combinación de los cuaternios desarrolladas más tarde por Eddington.

No obstante, no es mi propósito establecer conexiones entre el desarrollo de los cuaterniones, y el de las matrices, sino solamente mostrar las combinaciones de los cuaterniones, que son equivalentes a las matrices empleadas por la física teórica de los últimos años, en particular en lo que se refiere a ciertas ecuaciones de partículas. Es efectivamente éste el desarrollo moderno de la centenaria controversia entre la teoría corpuscular y la ondulatoria. Huyghens, Newton, Fresnel, J. J. Thompson, Bohr, Lorenz, De Broglie y Schrödinger, contribuyeron a dilucidar la cuestión.

La experiencia concede igual fuerza a cada una de las dos posiciones, y actualmente se acepta que existen dos aspectos para una partícula. Su concepción física le está vedada a nuestra imaginación, así como no podemos imaginar cuatro dimensiones, o un espacio elíptico, y debemos relegarle para siempre, a la representación matemática. La ecuación de Schrödinger muestra que para cada partícula existe siempre el aspecto de onda; y que todas sus ecuaciones como partícula son factorización de alguna forma de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales. Matemáticamente, la idea no es nueva. Además del factoreo del cuaternio como

$$\nabla^2 = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

$$\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

debe ponerse atención en el trabajo de J. Brill (1889, 1892, 1894) en el que $\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ es factoreado usando matrices que obedecen a las mismas reglas, que las de Eddington y Dirac.

Una forma cuaterniónica fué dada (Conway, 1936, 1937) para estas últimas matrices en términos de funciones cuaterniónicas lineales simplificadas. Las ecuaciones de Proca para el campo del mesón $(s=1)$ conducen a un aspecto de partícula que contiene matrices (Duffin, 1938; Kemmer, 1939) cuyas propiedades fueron estudiadas por Heitler (1943) y Schrödinger. Estas matrices, que en su forma más sencilla contienen 100 términos, obedecen a complicadas reglas de conmutación. El objeto de este trabajo es la obtención de matrices cuaterniónicas que obedezcan a las mismas reglas de conmutación. La complejidad de estas matrices proviene de la asimetría de las ecuaciones de Proca. Poniéndolas en una forma equivalente de cuaternión, muchas matrices sencillas pueden ser utilizadas para el aspecto de partícula de la ecuación del mesón.

Matrices de Dirac-Eddington

Si α, β y γ son los vectores unitarios fundamentales, que cumplen

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \alpha\,\beta\,\gamma = -1$$

una típica matriz de Eddington

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puede ser expresada en la forma $\alpha\,(\;)\,\beta$. Las otras pueden ser escritas según el siguiente esquema:

$\alpha\,(\;)\alpha$	$\beta\,(\;)\,\alpha$	$\gamma\,(\;)\,\alpha$	$i\,(\;)\,\beta$	$i\,(\;)\,\gamma$
$\alpha\,(\;)\,\beta$	$\beta\,(\;)\beta$	$\gamma\,(\;)\,\beta$	$i\,(\;)\,\gamma$	$i\,(\;)\,\alpha$
$\alpha\,(\;)\,\gamma$	$\beta\,(\;)\,\gamma$	$\gamma\,(\;)\,\gamma$	$i\,(\;)\,\alpha$	$i\,(\;)\,\beta$
$\beta\,(\;)\,i$	$\gamma\,(\;)\,i$	$\alpha\,(\;)\,i$		
$\gamma\,(\;)\,i$	$\alpha\,(\;)\,i$	$\beta\,(\;)\,i.$		

Debe tenerse en cuenta que todas las funciones en una fila o columna anti conmutan, y que dos funciones en diferentes filas y columnas conmutan. Si tomamos dos funciones conmutables cualesquiera, por ejemplo $\alpha\,(\;)\,\beta$ y $\gamma\,(\;)\,\alpha$ y formamos funciones tales como $f\,(\;) = \frac{1}{2}\,[\alpha\,(\;)\,\beta + \gamma\,(\;)\,\alpha]$ obtenemos $f^3 = f$ y ecuaciones como $f_1 f_2 f_3 + f_3 f_2 f_1 = 0$. En la otra sección se dará una generalización de estas funciones.

Se puede señalar que las matrices de Frobenius (loc. cit.), son, en forma cuaterniónica, $1, \alpha\,(\;), \beta\,(\;), \gamma\,(\;)$.

Funciones Subsidiarias

Represente $w_r + \alpha_r$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ cuatro cuaterniones que forman cuadrivectores ortogonales de modo que

$$w_r\, w_s - S\, \alpha'_r\, \alpha'_s = \delta_{rs}.$$

Sea otro conjunto $w_r + \alpha'_r$ teniendo las mismas partes escalares, tal que

$$w_r w_s - S \alpha'_r \alpha'_s = \delta_{rs}.$$

Aquí se puede hacer notar que si tenemos cualquier conjunto ortogonal de cuadrivectores, podemos obtener todos los demás mediante la transformación generalizada de Lorenz

$$\mathrm{a}\,(\;)\,\mathrm{b}, \quad \mathrm{Na} = \mathrm{Nb} = 1.$$

Uno de ellos es

$$1, \alpha, \beta, \gamma.$$

Luego, la expresión más general de estos conjuntos es

$$\mathrm{a\,b}, \quad \mathrm{a}\,\alpha\,\mathrm{b}, \quad \mathrm{a}\,\beta\,\mathrm{b}, \quad \mathrm{a}\,\gamma\,\mathrm{a}.$$

Para obtener un conjunto, dado uno cualquiera (digamos q) es necesario solamente tomar dos cuaterniones tales que $\mathrm{a\,b} = \mathrm{p}$. Para otros desarrollos véase Weiss (1941).

Formando las funciones

$$\mathrm{f}_r = \frac{1}{2}\left[\alpha_r\,(\;) + (\;)\,\alpha'_r\right]$$

$$\mathrm{g}_r = \frac{1}{2}\left[\alpha_r\,(\;) - (\;)\,\alpha'_r\right]$$

encontramos

$$\mathrm{f}_r\,\mathrm{f}_s\,\mathrm{f}_t + \mathrm{f}_t\,\mathrm{f}_s\,\mathrm{f}_r = (w_r w_s - \delta_{rs})\,\mathrm{f}_r + (w_t w_r - \delta_{ts})\,\mathrm{f}_t \quad (r, s, t = 1, 2, 3, 4)$$

$$\mathrm{g}_r\,\mathrm{g}_s\,\mathrm{g}_t + \mathrm{g}_t\,\mathrm{g}_s\,\mathrm{g}_r = (w_r w_s - \delta_{rs})\,\mathrm{g}_r + (w_t w_s - \delta_{ts})\,\mathrm{g}_t$$

$$\mathrm{f}_r\,\mathrm{g}_t + \mathrm{f}_t\,\mathrm{g}_r = 0$$

$$w_r\,(\mathrm{f}_s\,\mathrm{f}_t + \mathrm{g}_t\,\mathrm{g}_s) + w_t\,(\mathrm{f}_s\,\mathrm{f}_r + \mathrm{g}_r\,\mathrm{g}_s) - 2\,w_r\,w_s\,w_t = -\,w_r\,\delta_{ts} - w_t\,\delta_{rs}.$$

Los valores propios (eigenwerten) de f_r son, de acuerdo con lo anterior $0, i\,a_r, -i\,a_r$. Las multiplicidades se encuentran obteniendo los puntos unidos. Debe tenerse en cuenta que desde que $w_r^2 - \alpha_r^2 = w_r^2 - \alpha_r'^2 = 1$, podemos poner $-\alpha_r^2 = -\alpha_r'^2 = a_r^2$.

Nosotros tenemos

$$f_r(1) = \frac{1}{2}(\alpha_r + \alpha'_r)$$

$$f_r(\alpha_r) = \frac{1}{2}(-a_r^2 + \alpha_r \alpha'_r)$$

$$f_r(\alpha'_r) = \frac{1}{2}(-a_r^2 + \alpha_r \alpha'_r)$$

$$f_r(\alpha_r \alpha'_r) = -\frac{1}{2} a_r^2 (\alpha_r + \alpha'_r).$$

Así, correspondientemente al valor característico cero, obtenemos

$$A(\alpha_r - \alpha'_r) + B(a_r^2 + \alpha_r \alpha'_r)$$

donde las constantes escalares arbitrarias muestran que la multiplicidad de la raíz cero es dos. Los otros puntos unidos son

$$a_r(\alpha_r + \alpha'_r) \pm i(a^2 - \alpha_r \alpha'_r).$$

Para la función r hallamos

$$A(\alpha_r + \alpha'_r) + B(a_r^2 - \alpha_r \alpha'_r), \quad a_r(\alpha_r - \alpha'_r) \pm i(a^2 + \alpha_r \alpha'_r).$$

Matrices del Mesón

Las matrices de Duffin Kemmer β_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ satisfacen las ecuaciones

$$\beta_r \beta_s \beta_t + \beta_t \beta_s \beta_r = \delta_{rs} \beta_t + \delta_{ts} \beta_r \, .$$

o, en otra forma

$$(\Sigma x_r \beta_r)^3 = \Sigma x_r^3 . \Sigma x_r \beta_r.$$

Poniendo

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_r & 0 \\ 0 & 0 & w_r & -g_r \\ -f_r & w_r & 0 & 0 \\ 0 & g_r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hallamos

$$\Gamma_r \bar{\Gamma}_s \Gamma_t + \bar{\Gamma}_t \Gamma_s \bar{\Gamma}_r = \delta_{rs} \Gamma_t + \delta_{ts} \bar{\Gamma}_r .$$

La prueba puede ser abreviada poniendo

$$A_r = \begin{pmatrix} f_r & 0 \\ w_r & -g_r \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} -f_r & w_r \\ 0 & g_r \end{pmatrix}$$

tal que

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & A_r \\ B_r & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\Gamma_r \bar{\Gamma}_s \Gamma_t + \bar{\Gamma}_t \Gamma_s \bar{\Gamma}_r = \begin{pmatrix} 0 & A_r B_s A_t + A_t B_s A_r \\ B_r A_s B_t + B_t A_s B_r & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices del mesón simplificadas

Llamando ψ y ω a los potenciales escalar y vectorial del campo del mesón, y con ε y η el exa-vector, las ecuaciones de Proca pueden ser escritas, siendo m una constante

$$S \nabla \varepsilon = m \psi$$

$$V \nabla \eta - \dot{\varepsilon} = - m \omega$$

$$- \dot{\omega} - \nabla \psi = m \varepsilon$$

$$V \nabla \omega = m \eta .$$

De esto sigue

$$S \nabla \omega - \dot{\psi} = 0$$

$$V \nabla \varepsilon + \dot{\eta} = 0$$

$$S \nabla \eta = 0 .$$

Combinando, obtenemos la forma cuaterniónica de las ecuaciones de Proca

$$\nabla \varepsilon + \dot{\eta} = m\,\psi$$
$$-\nabla \eta + \dot{\varepsilon} = m\,\omega$$
$$-\nabla \psi - \dot{\omega} = m\,\varepsilon$$
$$\nabla \omega - \dot{\psi} = m\,\eta.$$

De ellas, obtenemos las matrices $\Gamma'_x\, \Gamma'_y\, \Gamma'_z\, \Gamma'_t$, donde

$$\Gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma'_y = \text{etc.}$$

$$\Gamma'_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en que

$$\Gamma_\lambda^2 = 1 \qquad \Gamma'_\lambda \Gamma'_\mu + \Gamma'_\mu \Gamma'_\lambda = 0 \quad (\lambda, \mu = x, y, z, t)$$

y de aquí la ecuación del aspecto de partícula

$$\left[\Gamma'_x \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma'_y \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma'_z \frac{\partial}{\partial z} + \Gamma'_t \frac{\partial}{\partial t} - m\right] \begin{pmatrix} \psi \\ i\,\omega \\ \varepsilon \\ i\,\eta \end{pmatrix} = 0$$

Estas matrices pueden ser generalizadas por medio de los cuadrivectores ortogonales, $w_r + \alpha_r$. Luego

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_r & w_r \\ 0 & 0 & -w_r & \alpha_r \\ -\alpha_r & -w_r & 0 & 0 \\ w_r & \alpha_r & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (r = 1, 2, 3, 4).$$

POLARIZACION DEL VACIO POR UN POTENCIAL DISCONTINUO

por

Guido Beck
Observatorio Nacional, Córdoba

(Recibido el 26 de marzo de 1945)

POLARISATION OF THE VACUUM BY A DISCONTINUOUS POTENTIAL

Summary: The considerations recently given on the microkinematics implied by DIRAC's theory (1), have, so far, only been applied to the case of the vacuum. The present paper shows, haw the influence of an external electromagnetic field on the state of the vacuum can be investigated and considers in detail a simplified, onedimensional model of a discontinuous electrostatic potential.

§ 1. Introducción. Como hemos mostrado en el trabajo anterior arriba citado, la teoría de *Dirac* implica una cinemática particular, describiendo el estado electromagnético del vacío simultáneamente con sus propiedades mecánicas. El estudio del estado del vacío en presencia de un campo electromagnético exterior debe, pues, revelar nuevas propiedades características de la teoría de *Dirac*. Sabemos que las modificaciones introducidas en el estado electromagnético del vacío por fuerzas exteriores pueden ser consideradas como una «polarización» del vacío, conduciendo en el caso de influencias suficientemente fuertes a una separación de cargas de ambos signos, conocida como producción de pares de electrones.

La dificultad de principio que se opone al tratamiento riguroso de nuestro problema fluye del hecho que una teoría satisfactoria tiene que incluir, desde el principio, la descripción del campo electromagnético y no permite la introducción del concepto de un campo «exterior». Sin embargo, el estado actual de la teoría todavía no permite llegar a una descripción tan completa. En el presente trabajo admitiremos, pues, de

(1) G. Beck, Field concepts in quantun theory. Rev. Mod. Phys. (Under press).

manera fenomenológica, la existencia de un campo llamado «exterior». La introducción de tal campo ya fué dada por *Dirac* desde el principio y fué justificada por un gran número de resultados, por ej., el éxito de la teoría de *Dirac* del átomo de hidrógeno. Podemos, pues, esperar que el mismo procedimiento revele, por lo menos aproximadamente, los fenómenos producidos por un campo en el vacío.

El primer resultado, al cual llegaremos más abajo, será que el estado electromagnético del vacío no implica las magnitudes del campo exterior, p. ej., del campo electrostático de un protón. Este resultado no puede ser inesperado: la referida teoría de *Dirac,* no puede informar sobre más que los fenómenos debidos a los electrones y permite, por lo menos en la aproximación alcanzada, separar el campo electromagnético en dos partes: en una parte debida a los electrones (incluso del vacío) y en otra parte, debida a origen ajeno (p. ej., a protones). La posibilidad de separación mencionada representa un hecho notable, a pesar de que todavía no conocemos su origen ni sus límites. Sin embargo, podemos afirmar que tal separación ya aparece, en forma todavía más general, en la electrodinámica clásica. El carácter lineal de las ecuaciones de *Maxwell* implica la superposición aditiva de los campos de dos cargas cualesquiera, y no solamente de los campos de un electrón y de un protón.

La investigación del caso más general, implicando la existencia de todas clases de partículas con sus campos respectivos, parece, en este momento, todavía fuera del alcance de la base actual de nuestra teoría. Sin embargo, ya será una de las tareas más importantes la de llegar, por lo menos en el caso restringido de ausencia de otras partículas, a una descripción completa. no fenomenológica, de un número de electrones y del campo electromagnético producido por ellos. El presente trabajo puede ser considerado como un primer paso para poder resolver el problema restringido.

El segundo resultado obtenido más abajo, se refiere al cálculo del estado del vacío en el caso de un campo electrostático discontinuo. Mostraremos, que este estado corresponde a una polarización y que la separación de cargas positivas y negativas se mantiene finita, incluso en el caso de una diferencia de potencial $\Delta V > 2\,mc^2$. Concluímos de nuestro resultado, que la teoría de Dirac ya contiene la interacción intrínseca entre un electrón y un positrón, contrariamente a las ideas de la teoría actual. Queremos sin embargo, antes de entrar en la discusión detallada de nuestro problema, mencionar en el § 2, las dificultades intrínsecas de las consideraciones de las teorías anteriores.

§ 2. Dificultades de la interpretación del comportamiento de un electrón en un salto de potencial según la mecánica cuántica. Consideraremos, primero, el caso del potencial representado por la figura 1 a. Es sabido que, según la mecánica cuántica, tal potencial permite calcular, en acuerdo con las experiencias, la reflexión y el pasaje de electrones de distintas velocidades y direcciones de movimiento. Resulta, en particular, que un electrón llegando de la izquierda con una energía cinética inferior a ΔV queda completamente reflejado, pero penetra una distancia finita al interior de la barrera de potencial. Al contrario, un electrón llegando de la derecha con una energía cinética pequeña ($\leqq \Delta V$) es con gran probabilidad reflejado, a pesar de que las fuerzas exteriores actúan en dirección inversa. Ambos fenómenos están en contradicción con los conceptos elementales de la dinámica, según los cuales cada cambio de movimiento supone la existencia de fuerzas en el lugar y en la dirección donde se produce el cambio de movimiento.

Siendo irrefutables las confirmaciones experimentales de la mecánica ondulatoria, mucha gente ha aceptado el punto de vista de que el segundo principio de *Newton* ya no se aplica en casos tan extremos. Queremos insistir aquí en que tal punto de vista es prematuro. Una vez que admitimos la existencia de una polarización del vacío, la fuerza que actúa sobre un electrón no puede ser determinada considerando solamente el campo electromagnético exterior. Sin embargo, tampoco es posible definir y añadir un campo espacio-temporal que tenga en cuenta la polarización del vacío, ya que la polarización del vacío depende esencialmente del impulso del electrón considerado. Llegamos, pues, a la conclusión de que el concepto de un «campo espacio-temporal» en su forma actual, no puede ser mantenido en la micro-física y tiene que ser reemplazado por el concepto más general de un «campo definido en el espacio-tiempo de la fase». Llamamos aquí espacio-tiempo de fase el continuo de siete dimensiones, las coordenadas del cual son, en el caso más sencillo, x, y, z, t, p_x, p_y, p_z. Es este campo que tendremos que estudiar más abajo.

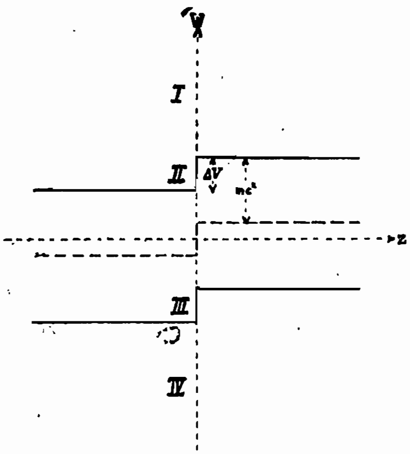

Fig. 1 a

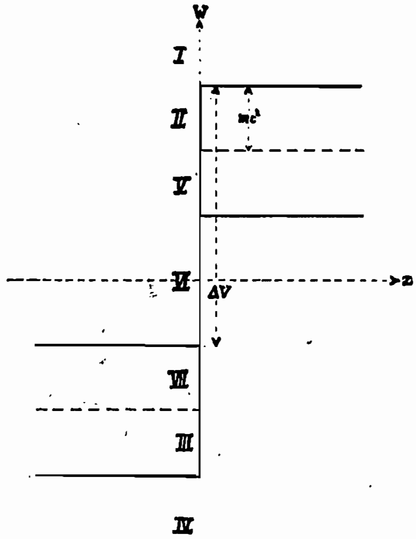

Fig. 1 b

El segundo caso que presenta interés para nosotros, es el del potencial representado por la figura 1 b. Se trata, aquí, del problema conocido bajo el nombre de la «paradoja de *Klein*». *Klein* mostró, que según la primera interpretación de la teoría de *Dirac,* un electrón de pequeña energía cinética $(< \Delta V - 2mc^2)$ es capaz de penetrar de la izquierda, con probabilidad finita, y, después de un cambo espontáneo del signo de su energía cinética, continuar a la derecha del salto. Ningún sentido físico puede ser atribuído a tal interpretación del formalismo de *Dirac. Dirac* propuso, entonces, una modificación de interpretación, conocida bajo el nombre de la «teoría de las lagunas», que, cualitativamente, permite dar una interpretación física y puede ser verificada por las experiencias. Según la construcción de *Dirac,* tenemos que imaginar, que la parte de energía cinética negativa de nuestra figura está llena de electrones inobservables, considerando como positrón cada laguna que aparece si uno de estos electrones penetra a la izquierda y forma, allá, un electrón observable.

La dificultad de principio de la interpretación dada por *Dirac* es que supone que podemos tratar un electrón, sin tener en cuenta su campo electromagnético. Despreciando la interacción entre los electrones, podemos, efectivamente, admitir una corriente infinita de cargas positivas y negativas producida por un potencial discontinuo. Sin embargo, tal interpretación no es compatible, ni con la experiencia, ni con las propiedades del formalismo de *Dirac*. Mostraremos, más abajo, que la separación de cargas, producida por el potencial de la figura 1 b, se mantiene finita, lo que indica que el formalismo de *Dirac* ya contiene la interacción intrínseca entre electrones, sin que haga falta recorrer al concepto filosóficamente inadmisible de electrones no observables.

§ 3. Transformaciones unitarias generales. Consideraremos, en lo siguiente, las soluciones de la ecuación de *Dirac*

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\vec{\alpha}\operatorname{grad}\psi+\frac{i}{\Lambda}\beta\psi+\frac{2ai}{h}U(t)\psi=0 \qquad (1)$$

donde la energía $U(t)$ puede ser elegida de tal manera que

$$\begin{aligned} U&=\text{const.} \quad \text{para} \quad t\leqq t_0 \\ U&=U(t) \quad \text{para} \quad t\geqq t_0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Incluyendo el límite $t_0 \to -\infty$, las condiciones (2) no implican ninguna restricción esencial del caso más general. Supondremos, además, que, para $t<t_0$, la solución de (1) sea dada por un sistema orto-normal de funciones

$$u_r\,(*).$$

(*) Tenemos que mencionar explícitamente, que contrariamente a las magnitudes de (1) utilizadas en la teoría general, consideramos aquí solamente soluciones particulares, de manera que ψ_i y u_r representan spinores habituales de cuatro componentes.

Entonces, la solución general de (1) puede ser escrita

$$\psi_i = s_{ir}(t) \cdot u_r \text{ (*)}$$

$$s_{ir}(t) = \delta_{ir}\, e^{-\frac{2ai}{h} E_i t} \text{ para } t \leqq t_0. \tag{3}$$

Concluímos fácilmente de (1) que

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\psi}_i \psi_k) - \operatorname{div}(\tilde{\psi}_i \vec{\alpha} \psi_k) = 0; \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \tilde{\psi}_i \psi_k \, d\tau = 0 \tag{4}$$

y

$$\int \psi_i^* \psi_k \, d\tau = s^*_{ir} s_{kr} = \int u_i^* u_k \, d\tau = \delta_{ik} \tag{5}$$

La relación (5) nos enseña, que el sistema ψ_i de funciones representa un sistema ortonormal de funciones para cualquier momento t y que $s_{ir}(t)$ es una transformación unitaria.

Sea F un operador lineal. La expresión

$$\{F\}^{\psi}_{ik} = \psi_i^* F \psi_k \tag{6}$$

representa, entonces, una forma bilineal. La transformación $s_{ir}(t)$ transforma la forma (6) según

$$\{F\}^{\psi}_{ik} = s^*_{ir} u^*_r F u_s s_{ks} = s^*_{ir} \{F\}^{u}_{rs} s_{ks}. \tag{7}$$

En el caso particular, que F no opera sobre el tiempo, los coeficientes s_{ks} conmutan con F y (7) se simplifica de manera

$$\{F\}^{\psi}_{ik} = s^*_{ir} s_{ks} \{F\}^{u}_{rs} \tag{8}$$

y conduce, en particular, a la relación

$$\operatorname{Spur}\{F\} = \{F\}^{\psi}_{ii} = \{F\}^{u}_{rr} = \text{invariante}. \tag{9}$$

(*) Dos índices iguales implican sumación sobre todos los valores.

Tenemos, sin embargo, que subrayar el hecho, que la fórmula (9) no es válida, si el operador F opera sobre la variable t.

§ 4. Teoremas sobre la polarización del vacío. El teorema (9) puede servir inmediatamente para la investigación de la distribución de cargas y de corrientes en el vacío.

Según la teoría expuesta en el trabajo arriba citado tenemos que poner

$$\vec{E} = 4\pi\mu\{i\vec{\gamma}\} \qquad \vec{H} = -4\pi\mu[\beta\vec{\sigma}]$$
$$\rho = \mu \operatorname{div}\{i\vec{\gamma}\} \tag{10}$$
$$\vec{S} = -\mu\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\{i\vec{\gamma}\}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\beta\vec{\sigma}]\right).$$

Aplicando la relación (9) y teniendo en cuenta que $\operatorname{Spur}\{i\vec{\gamma}\} = 0$ en el caso de ausencia de campos exteriores, resulta

$$\operatorname{Spur}\ \rho = \mu\ \operatorname{Spur}\ \operatorname{div}\{i\vec{\gamma}\} = \operatorname{div}\ \operatorname{Spur}\{i\vec{\gamma}\} = 0 \tag{11}$$

$$\operatorname{Spur}\ \vec{s} = -\mu\ \operatorname{Spur}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\{i\vec{\gamma}\}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\beta\vec{\sigma}]\right) \neq 0. \tag{12}$$

La desigualdad (12) fluye del hecho, que la expresión $\vec{s}$ contiene una derivada con respecto al tiempo.

La relación (11) afirma que la densidad total de carga eléctrica (implicando la suma sobre todos los impulsos y sobre los cuatro estados del carácter) desaparece en cada punto del espacio. Según (12), un teorema análogo no puede ser enunciado con respecto a las densidades de corrientes (*).

(*) Mencionamos también, que teoremas análogos a (11) y (12) son válidos para las densidades magnéticas

$$-\mu \operatorname{Spur} \operatorname{div}[\beta\vec{\sigma}] = 0$$

$$\mu \operatorname{Spur}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial[\beta\vec{\sigma}]}{\partial t} - \operatorname{rot}\{i\vec{\gamma}\}\right) \neq 0.$$

Según (11), las magnitudes del campo del vacío (10) no corresponden a ninguna distribución finita de carga eléctrica total, incluso en el caso que el campo exterior, representado por U, corresponde a una distribución de cargas cualquiera. Es este resultado el que hemos mencionado y discutido arriba, en § 1 y § 2.

§ 5. **El ejemplo de un salto de potencial electrostático.** Calcularemos en particular la distribución de cargas en el caso simplificado unidimensional del salto de potencial representado por la fig. 1.

La determinación de las combinaciones lineales ortonormales correctas de las autofunciones de la ecuación de *Dirac* presenta, en el caso del potencial de la fig. 1, ciertas dificultades. Estas dificultades fueron resueltas considerando una barrera de potencial (fig. 2) de ancho finito, 2.a, y tendiendo, después, al límite, $\lim a \longrightarrow \infty$. El cálculo de las autofunciones es elemental y no presenta interés particular. No indicaremos, pues, más que las expresiones de ρ en las cuatro (resp. siete) regiones de energía, a la izquierda del salto de potencial, $z<0$.

I. $W \geqq \mathrm{mc}^2 + \frac{1}{2}\Delta V$

$$\rho_{\mathrm{I}} = -\frac{2p_z}{mc} \cdot \frac{p_z(p'_0+mc)-p'_z(p_0+mc)}{p_z(p'_0+mc)+p'_z(p_0+mc)} \cos(2kz) \qquad (13)$$

II. $\mathrm{mc}^2 - \frac{1}{2}\Delta V \leqq W \leqq \mathrm{mc}^2 + \frac{1}{2}\Delta V$

$$\rho_{\mathrm{II}} = -\frac{2p_z}{mc} \cos 2(kz+\delta)\,; \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{p'_z(p_0+mc)}{p_z(p'_0+mc)} \qquad (14)$$

III. $-\mathrm{mc}^2 + \frac{1}{2}\Delta V \geqq W \geqq -\mathrm{mc}^2 - \frac{1}{2}\Delta V$

$$\rho_{\mathrm{III}} = \frac{4p_z^2 p'_z}{mc} \; \frac{(p_0+mc)(p'_0+mc)}{p_z'^2(p_0+mc)^2+p_z^2(p'_0+mc)^2} \, e^{2kz} \qquad (15)$$

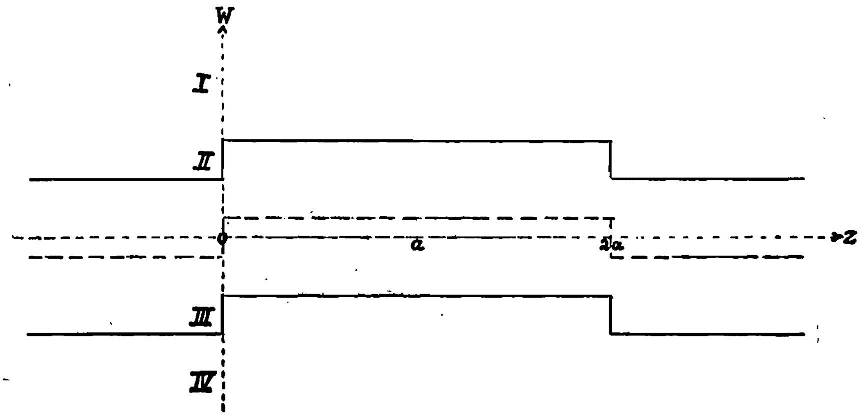

Fig. 2 a

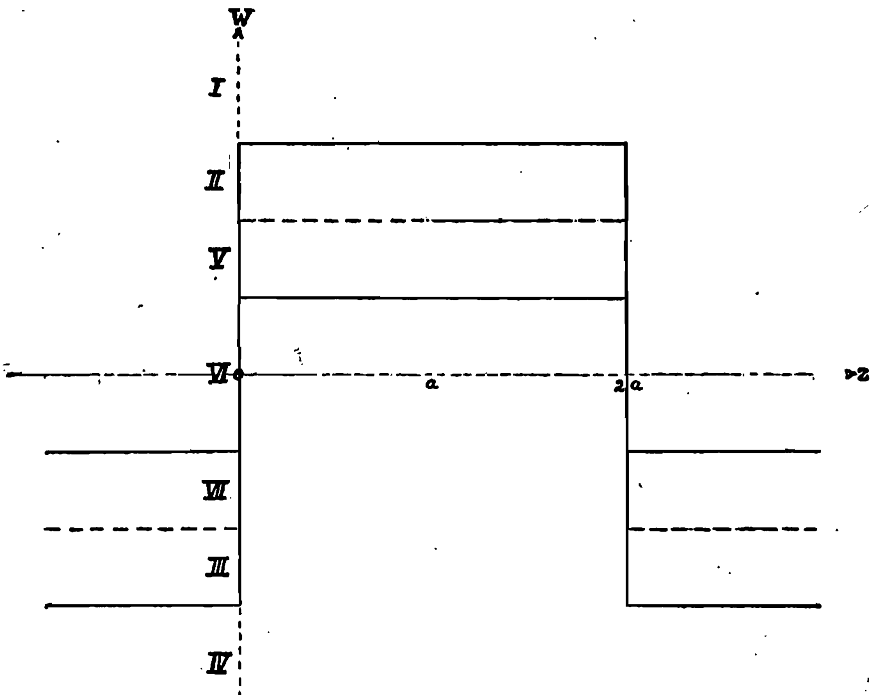

Fig. 2 b

IV. $W \leqq mc^2 - \frac{1}{2}\Delta V$

$$\rho_{IV} = -\frac{2p_z}{mc}\,\frac{p_z(p'_0+mc)-p'_z(p_0+mc)}{p_z(p'_0+mc)+p'_z(p_0+mc)}\cos(2kz), \qquad (16)$$

con

$$k = \frac{2\pi}{p}p_z$$

$$p_0 = \frac{1}{c}\,|W + \frac{1}{2}\Delta V|\,; \qquad p'_0 = \frac{1}{c}\,|W - \frac{1}{2}\Delta V| \qquad (17)$$

$$p_z = +\sqrt{|p_0^2 - 1|}\,; \qquad p'_z = +\sqrt{|p_0'^2 - 1|}\,.$$

La representación gráfica de las expresiones (13—16) está dada, en el caso $\Delta V = \frac{1}{2}$ cm², $z = -0$, por la fig. 3.

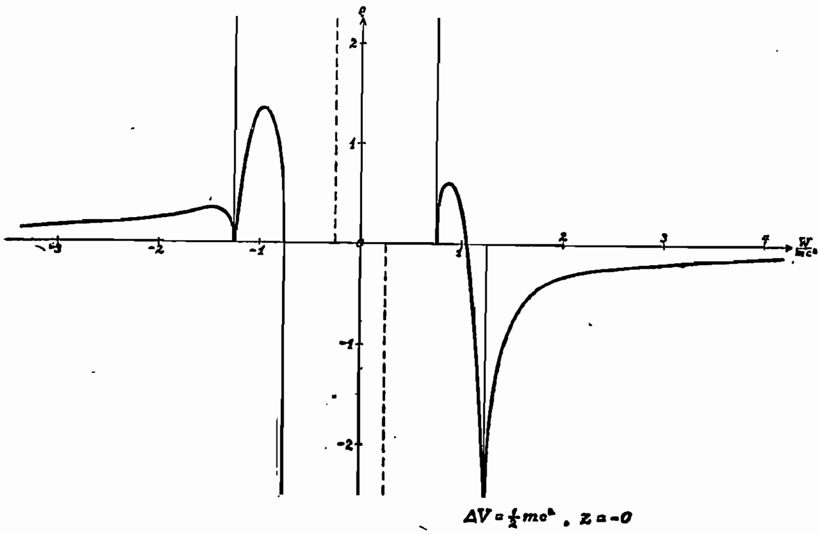

Fig. 3

Caso de la fig. 1 b:

I. $W \geqq mc^2 + \frac{1}{2}\Delta V$

ρ_I igual que (13).

II. $\frac{1}{2}\Delta V \leqq W \leqq \mathrm{mc}^2 + \frac{1}{2}\Delta V$

ρ_{II} igual que (14).

V. $-\mathrm{mc}^2 + \frac{1}{2}\Delta V \leqq W \leqq \frac{1}{2}\Delta V$

$$\rho_{\mathrm{V}} = \frac{2p_z}{mc}\cos 2(kz \leqq \bar{\delta}); \quad \mathrm{tg}\,\bar{\delta} = -\frac{p_z\, p'_z}{(p_0+mc)(p'_0+mc)} \tag{18}$$

VI. $\mathrm{mc}^2 - \frac{1}{2}\Delta V \leqq W \leqq -\mathrm{mc}^2 + \frac{1}{2}\Delta V$

$$\rho_{\mathrm{VI}} = \frac{2p_z}{mc}\,\frac{(p_0+mc)(p'_0+mc) - p_z p'_z}{(p_0+mc)(p'_0+mc) + p_z p'_z}\cos(2kz) \tag{19}$$

VII. $-\frac{1}{2}\Delta V \leqq W \leqq \mathrm{mc}^2 - \frac{1}{2}\Delta V$

$$\rho_{\mathrm{VII}} = \frac{4p_z^2 p'_z}{mc}\,\frac{(p_0+mc)(p'_0+mc)}{(p_0+mc)^2(p'_0+mc)^2 + p_z^2 p_z'^2}\, e^{2kz} \tag{20}$$

III. $-\mathrm{mc}^2 - \frac{1}{2}\Delta V \leqq W \leqq -\frac{1}{2}\Delta V$

ρ_{III} igual que (15).

IV. $W \leqq -\mathrm{mc}^2 - \frac{1}{2}\Delta V$

ρ_{IV} igual que (16).

En el caso $\Delta V = 4\,.\,\mathrm{mc}^2$, $z = -0$, las expresiones (13-20) son representadas gráficamente por la fig. 4.

Para $z = +0$, las mismas expresiones y figuras se obtienen por la transformación $W \longrightarrow -W$. Un potencial electrostático produce, pues, en el vacío una distribución de cargas, con una discontinuidad en el salto, $z=0$.

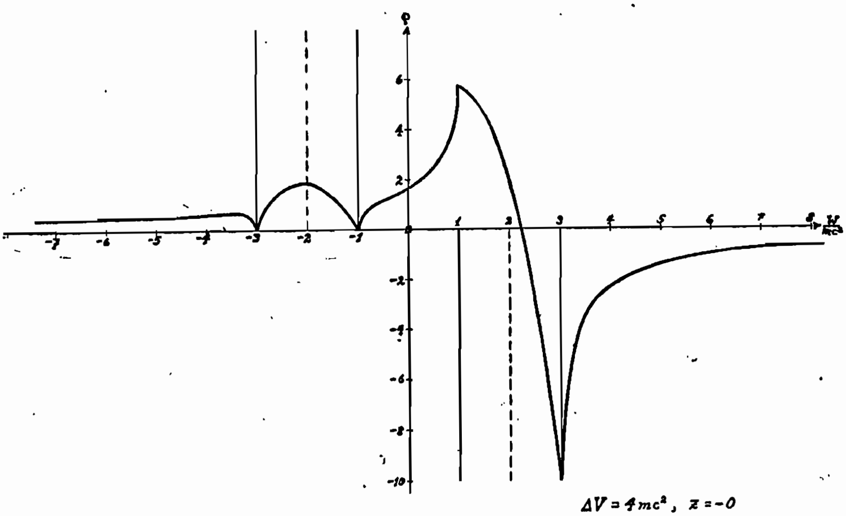

Fig. 4

El autor expresa sus agradecimientos al señor A. Völsch, por la evaluación numérica de las expresiones dadas en el § 5 y a la Señora S. de Sigal por la revisión del texto castellano.

CRONICA

PRIMERAS JORNADAS MATEMATICAS ARGENTINAS

En junio pasado, un numeroso grupo de matemáticos de Buenos Aires y La Plata se reunió con el fin de cambiar ideas para propender a una mayor vinculación entre los cultores de esa ciencia que actúan en la Argentina y se resolvió, después de haber consultado a los colegas del interior, realizar las Primeras Jornadas Matemáticas Argentinas.

A tal efecto se resolvió enviar una invitación a participar en las Jornadas a todos los matemáticos que actúan en el país, sin exclusión alguna, suscripta por el Dr. Durañona y Vedia, Jefe del Departamento de Matemáticos de la Universidad de La Plata, Dr. Beppo Levi, Director del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Litoral, Dr. Pedro Pi Calleja, Representante de la Universidad de Cuyo, Ingº Emilio Rebuelto, Director del Seminario Claro C. Dassen de la Sociedad Científica Argentina, Dr. Julio Rey Pastor, Director del Instituto Matemática de la Universidad de Buenos Aires, Dr. Alejandro Terracini, de la Universidad de Tucumán.

En esa invitación se expresaba la esencial finalidad perseguida en los siguientes términos:

"Los Directores de los Institutos Matemáticos del país y los profesores que suscriben, después de haber compulsado el sentimiento ambiente respecto de la realidad científica argentina, que como resultado de las actividades mundiales hondamente perturbadas por la guerra, se ve en la necesidad impostergable de vigorizarse a sí misma y de encarar su organización para ponerse a la altura de lo que las circunstancias exigen, han coincidido en la necesidad de realizar las Primeras Jornadas Matemáticas Argentinas.

"Durante muchos años los distintos estudiosos de las ciencias matemáticas han actuado separadamente en nuestro país impidiendo este aislamiento la obtención del máximo rendimiento en la actividad en que todos estamos empeñados. Consideramos llegada la hora de superar tal estado de cosas. Las nuevas generaciones que se están acercando a nuestros Institutos nos imponen el deber de encarar claramente estos problemas y hacer los máximos esfuerzos para consolidar una efectiva unión de los matemáticos de la Argentina y para estructurar una organización que en el futuro impulse el progreso de la ciencia matemática.

"Las Primeras Jornadas Matemáticas Argentinas se realizarán en Buenos Aires y La Plata los días 27, 28 y 29 de Julio de 1945, de acuerdo al siguiente programa:

1) Trabajos científicos. Presentación y discusión.
2) Agrupación de todos los matemáticos de la Argentina e iniciativas respecto a la organización de grupos de estudio.
3) Preparación de un futuro Congreso de Matemáticas, Física y Astronomía.

"Tenemos el agrado de invitar a Ud. a participar en estas Jornadas Matemáticas que, de contar con el auspicio de todos, señalarán un jalón importante en la evolución científica del país.

"Quedaríamos muy agradecidos si usted nos hiciera llegar las sugestiones que les inspire la enunciación de nuestras ideas."

A continuación transcribimos el programa de las Jornadas y la nómina de las comunicaciones recibidas.

PROGRAMA

Viernes 27

A las 17 horas en punto: Sesión inaugural en el Aula Magna de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. El discurso de apertura será pronunciado por el profesor Beppo Levi; a continuación se expondrán y discutirán comunicaciones matemáticas.

A las 18.30 horas pronunciará el profesor Levi una conferencia patrocinada por el C. E. I. sobre el tema: "Euclides y el pensamiento socrático".

Sábado 28

A las 10 horas en la sede de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Perú 222, proseguirá la exposición de trabajos.

A las 17 horas en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Perú 222, terminará la exposición de los trabajos presentados, discutiéndose después las mociones que sean presentadas con anterioridad.

A continuación serán agasajados los concurrentes.

Domingo 29

A las 10 horas recepción en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de La Plata y discusión de los temas generales de agrupación de matemáticos, organización de grupos de estudio y preparación del congreso científico que habrá de celebrarse en septiembre próximo.

A las 12.30 horas almuerzo de camaradería en el Centro de estudiantes.

A las 15 horas visita al Museo de Ciencias Naturales, siendo explicadas las colecciones por el personal técnico del Museo.

A ias 16 horas visita al Observatorio Astronómico, con explicaciones técnicas.

COMUNICACIONES

MANUEL BALANZAT, "Sobre los espacios cuasimétricos".

JOSÉ BARRAL SOUTO, "Plazos óptimos para préstamos con seguro de vida".

GUIDO BECK, "Espacio con métrica lineal".

CLOTILDE BULA, "Sobre ciertos polinomios de dos variables análogos a los de Laguerre".

ELÍAS DE CÉSARE, "Sobre la Teoría de Segre de los puntos imaginarios en la Geometría Proyectiva".

ADULIO CICHINI, "Ecuaciones del movimiento de un electrón en un campo magnético".

MISCHA COTLAR, "Una generalización de factoriales y su aplicación a los números de Bermoulli".

— "Sobre una posible extensión del principio de conservación de dominios".

ERNESTO COROMINAS, "Sobre las derivadas generalizadas".
CARLOS DIEULEFAIT, "Nota sobre los desarrollos de las funciones monógenas".
AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA, "Ampliación de espacios".
ADOLFO FARENGO DEL CORRO, "Sobre las colineaciones en E_2.
ESTHER FERRARI, "Sobre los espacios topológicos generales".
MARÍA A. FERRARI, "Algunas propiedades de las funciones D".
YANNY FRENKEL, "Una teoría general de límites e integración abstracta basada en ella".
EDUARDO GASPAR, "Sobre las variedades racionales normales".
FERNANDO L. GASPAR, "Sobre la existencia de infinitos sistemas de polinomios de Hermite".
ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (No recibida todavía).
JUAN CARLOS GRIMBERG, "Acerca del isomorfismo entre las álgebras de Boole y las álgebras de clases".
ANGEL J. GUARNERI, "Nomogramas sobre problemas viales".
BOGUMIL JASSINOWSKI, "Naturaleza del razonamiento matemático".
JUAN KERVOR, "Sobre el método de sumación de Borel".
GREGORIO KLIMOVSKY, "Inclusión de las álgebras de Boole en la Aritmética ordinaria".
GUILLERMO KNIE, "Algebra del mesón en tres dimensiones".
EDUARDO LABIN, "Problemas y tareas especiales de las matemáticas aplicadas".
LUCIANO ALLENDE LEZAMA, "Sobre un sistema de coordenadas. Espacio teórico".
JUSTO PASCALI, "Generación Proyectiva de las curvas W.
PEDRO PI CALLEJA, "Anotaciones sobre las integrales de Fourier - Titchmarsh.
ELBA RAIMONDI, "Sobre las funciones continuas no derivables".
CELINA REPETTO, "Transformaciones generalizadas de Laplace-Stieltjes".
JULIO REY PASTOR, "Series de Schwatt".
— "Topología combinatoria abstracta".
EMILIO ROXIN, "Axiomática de la Topología Combinatoria".
ALBERTO SAGASTUME (No recibida todavía).
LUIS A. SANTALÓ, "Superficies cuyas curvas D son geodésicas o trayectorias isogoanles de las líneas de curvatura.
ALEJANDRO TERRACINI, "Para la Geometría de los polinomios monodifricos".
FAUSTO TORANZOS, "Demostración del teorema de Jordán en el plano proyectivo. Colineaciones en el espacio de Hilbert".
ANDRÉS VALEIRAS, "Resolución de algunos tipos de ecuaciones funcionales".
ANTONIO VALEIRAS, "Sobre los potenciales de Humbert".
CESÁREO VILLEGAS MAÑE, "Generalizaciones de algunos teoremas de Análisis a los espacios multidimensionales".
MÁXIMO VALENTINUZZI, "Aplicación de la teoría de grupos al estudio de las moléculas".
— "Sobre las figuras cariocinéticas".
EDUARDO ZARANTONELLO, "Sobre las topologías de un espacio lineal".

En nuestro próximo número haremos una reseña de estas Primeras Jornadas Matemáticas Argentinas.

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

VOLUMEN I (1936-1937), VOLUMEN II (1938-1939)

Notas y memorias de J. BABINI, C. BIGGERI, C. A. BULA, F. CERNUSCHI, J. A. DEL PERAL, J. FAYET, Y. FRENKEL, F. L. GASPAR, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, T. LEVI-CIVITA, M. PETROVICH, J. REY PASTOR, S. RIOS, F. TORANZOS.
Bibliografía, Extractos, Crónica, Revista de revistas, etc.

VOL. III (1938-1939). VOL. IV (1939). VOL. V (1940). VOL. VI (1940-1942).

Fascículos separados

Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*
» 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*
» 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.*
» 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
» 5. — NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
» 6. — RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*
» 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.
» 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*
» 9. — CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
» 10. — COTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*
» 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
» 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
» 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
» 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
» 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
» 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
» 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por* n *rectas arbitrarias.*
» 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
» 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*
» 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
» 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
» 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*
» 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
» 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
» 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

VOL. VII (1940-1941). VOL. VIII (1942). VOL. IX (1943). VOL. X (1944-1945)

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, J. BARRAL SOUTO, G. BECK, M. BUNGE, H. E. CALCAGNO, E. A. DE CESARE, E. FERRARI, V. y A. FRAILE y C. CRESPO, Y. FRENKEL, R. FRUCHT, E. GASPAR, F. L. GASPAR, A. J. GUARNIERI, J. E. HERRERA, G. KNIE, N. KRIVOSHEIN, W. MÄCHLER, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, S. RIOS, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, S. SISPÁNOV, A. TERRACINI.
Informes de las reuniones de la Asociación Física Argentina.
Soluciones de temas propuestos, Bibliografía, Crónica, etc.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:
Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.*
Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.*
Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática.*

SUMARIO