Volumen XI Número 4

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

ORGANO DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

REDACTADA por

J. Babini (Director), J. Rey Pastor, L. A. Santaló y E. Gaviola (Delegado de la A. F. A.)

BUENOS AIRES
1946

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de $ 5. — m/n. mensuales o de $ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de $ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de $ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Dr. MÁXIMO VALENTINUZZI
Gascón 520, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Para ingresar a la Asociación Física Argentina debe abonarse una cuota mensual de $ 5.— m/n. Los estudiantes de física y de astronomía pagarán una cuota mensual de $ 1.— m/n.

SISTEMAS MULTI-ISOTERMOS (*)

por

EDWARD KASNER Y JOHN DE CICCO

1. - *Sumario de resultados.* — La teoría de las funciones de una variable compleja es esencialmente idéntica a la geometría conforme del plano real (o complejo). Sin embargo, esto *no* sucede en la teoría de las funciones de *dos o más* variables complejas. Cualquier conjunto de $n \geqq 2$ funciones de n variables complejas que no anulan al jacobiano induce una correspondencia entre los puntos de un espacio euclidiano $2n$-dimensional real (o complejo) R_{2n}. El grupo infinito G de tales correspondencias *no* es el grupo conforme de R_{2n}, el cual es simplemente el grupo de las inversiones de $(n+1)(2n+1)$ parámetros (1). Poincaré, en su fundamental trabajo publicado en los Rendiconti de Palermo (1907), llamó a G el grupo de transformaciones *regulares*. En 1908, Kasner encontró más apropiado designarlo *el grupo pseudo-conforme* G. Esta es ahora la terminología corriente.

En su trabajo de 1908, que fué publicado completo más tarde, en 1940, Kasner mostró que el grupo pseudo-conforme G de R_l está caracterizado por la conservación del pseudo-ángulo entre cualquier curva y una hipersuperficie, en su punto común de intersección (2). Esto es una generalización directa del resultado

---

(*) Presentado a la American Mathematical Society, 1945.

(1) LIOUVILLE probó que el grupo conforme del espacio euclidiano E_m de cualquier dimensión $m>2$, par o impar, es el grupo inverso de $(m+1)(m+2)/2$ parámetros. Fialkow ha estudiado la geometría conforme de una curva o superficie no solamente en un espacio euclidiano E_m sino también en cualquier espacio riemaniano V_m. Ver las memorias, *Conformal geometry of curves*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 54 (1942), y *Conformal geometry of surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 56 (1944).

(2) KASNER, *Conformality in connection with functions of two complex variables*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 48, págs.

bien conocido que el grupo de funciones de una variable compleja es idéntico con el grupo conforme (directo) del plano. En 1945, De Cicco probó este teorema para el caso del espacio euclidiano $2n$-dimensional R_{2n} ([3]).

En R_{2n} hay una clase de superficies bi-dimensionales, la cual es transformada en sí misma bajo el grupo pseudo-conforme infinito G, tal que la correspondencia inducida entre cualquier par correspondiente de tal superficie es conforme. Una superficie tal es dicha ser una *superficie analítica o conforme.*

Proyectando ortogonalmente una superficie conforme sobre un conjunto elegido de n planos coordenados, las $(n-1)$ correspondencias inducidas son cada una conformes. De este modo cualquier superficie conforme puede ser definida por $(n-1)$ correspondencias conformes entre el conjunto elegido de n planos coordenados.

Diremos que es *un sistema multi-isotermo de* ∞^{2n-1} *curvas* en R_{2n}, cualquier sistema que es equivalente pseudo-conformemente a un haz de ∞^{2n-1} rectas paralelas en R_{2n}. Cualquier sistema tal consiste de ∞^{2n-2} familias isotermas de ∞^{1} curvas, cada familia contenida en una superficie conforme.

Definimos un *sistema multi-isotermo de* ∞^{1} *hipersuperficies* en R_{2n} como cualquier sistema que es pseudo-conformemente equivalente a un haz de ∞^{1} hiperplanos paralelos en R_{2n}. Cualquier sistema isotermo de hipersuperficies $(2n-1)$ dimensionales puede ser definido estableciendo igual a una constante arbitraria una función multiarmónica. En ese caso, la constante arbitraria es llamada el parámetro isotermo. En general, una familia isoterma de ∞^{1} hipersuperficies puede ser definida escribiendo igual a una constante arbitraria una función de una función multiarmónica.

Enunciaremos y demostraremos los siguientes teoremas, que son fundamentales en la teoría de funciones de n variables complejas ([4]).

50-62 (1940). También KASNER y DE CICCO, *Pseudo-conformal geometry: Functions of two complex variables,* Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 48, págs. 317-328 (1942).

([3]) DE CICCO, *The pseudo-angle in space of 2n dimensiones,* Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 51, págs. 162-168 (1945).

([4]) En esta memoria, generalizamos al espacio de $2n$ dimensiones, ciertos teoremas en el espacio cuatri-dimensional sobre funciones de dos variables com-

1. El pseudo-ángulo entre cualquier sistema multi-isotermo de hipersuperficies y cualquier sistema multi-isotermo de curvas es una función multiarmónica. Este puede ser considerado como una extensión de un teorema de Lie referente a sistemas isotermos en el plano.

2. Cualquier sistema multi-isotermo de hipersuperficies es seccionado por una superficie conforme en un sistema isotermo de curvas.

3. Si una superficie es seccionada por cada sistema multi-isotermo de hipersuperficies en un sistema isotermo de curvas, entonces la superficie es conforme.

4. Si un sistema dado de ∞^1 hipersuperficies es seccionado por cada superficie conforme en un sistema isotermo de curvas, entonces el sistema dado de ∞^1 hipersuperficies es multi-isotermo.

2. - *Coordenadas mínimas.* — Sean $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_\alpha, y_\alpha)$ las coordenadas cartesianas de un espacio euclidiano o complejo $2n$-dimensional R_{2n}. Hallaremos conveniente introducir las coordenadas mínimas $(u_1, u_2, \ldots, u_n; v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_\alpha, v_\alpha)$, definidas por

$$u_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha, \qquad v_\alpha = x_\alpha - i y_\alpha, \tag{1}$$

para $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. La inversa de esta correspondencia es

$$x_\alpha = \frac{1}{2}(u_\alpha + v_\alpha), \qquad y_\alpha = \frac{1}{2i}(u_\alpha - v_\alpha). \tag{2}$$

Las relaciones siguientes son notadas entre las derivadas parciales en coordenadas mínimas y coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial}{\partial u_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial}{\partial v_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right). \tag{3}$$

También es notado que

---

plejas que hemos ya considerado en la memoria, *Bi-isothermal systems*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 51, págs. 169-174 (1945). Ver también KASNER, *Biharmonic functions, and certain generalizations*, American Journal of Mathematics, Vol. 58, págs. 377-390 (1936).

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial u_\alpha}+\frac{\partial}{\partial v_\alpha},\quad \frac{\partial}{\partial y_\alpha}=i\left(\frac{\partial}{\partial u_\alpha}-\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\right). \tag{4}$$

Los operadores $\partial/\partial u_\alpha$ son llamados las *derivadas medias,* y los operadores $\partial/\partial v_\alpha$ son designados las *derivadas de fase.* Ellos son importantes en la teoría de las funciones polígenas (5).

En coordenadas mínimas, el cuadrado del elemento lineal ds es

$$ds^2=\sum_{\alpha=1}^{n} du_\alpha\, dv_\alpha. \tag{5}$$

El ángulo ϑ entre dos elementos curvos cualesquiera $(du_\alpha^{(1)}, dv_\alpha^{(1)})$ y $(du_\alpha^{(2)}, dv_\alpha^{(2)})$ en un punto común es

$$\cos\vartheta=\frac{\sum_{\alpha=1}^{n}[du_\alpha^{(1)}dv_\alpha^{(2)}+du_\alpha^{(2)}dv_\alpha^{(1)}]}{2[(\sum_{\alpha=1}^{n} du_\alpha^{(1)}dv_\alpha^{(1)})(\sum_{\alpha=1}^{n} du_\alpha^{(2)}dv_\alpha^{(2)})]^{1/2}}. \tag{6}$$

3.-*El grupo pseudo-conforme continuo infinito G.* — Este es dado en coordenadas mínimas por

$$U_\alpha=U_\alpha(u_1,u_2,\ldots,u_n),\quad V_\alpha=V_\alpha(v_1,v_2,\ldots,v_n), \tag{7}$$

para $\alpha=1,2,\ldots,n$, donde los jacobianos $|\partial U_\alpha/\partial u_\beta|$ y $|\partial V_\alpha/\partial v_\beta|$ son no nulos en una región dada del espacio $2n$-dimensional R_{2n}. Nuestro problema es iniciar el estudio de la geometría de este grupo en detalle.

En lo siguiente, omitiremos la consideración de los mínimos n-planos (n-flats) especiales $u_\alpha=$ const. y $v_\alpha=$ const. Nuestro grupo pseudo-conforme puede ser definido como la parte directa del grupo mixto (mixed) total de transformaciones puntuales de R_{2n} que conservan estas $2\infty^n$ n-planos (n-flats) mínimos especiales.

(5) KASNER, *The second derivative of a polygenic function,* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 30, págs. 803-818 (1928). KASNER y DE CICCO, *The derivative circular congruence-representation of a polygenic function,* American Journal of Mathematics, Vol. 61, págs. 995-1003 (1939). Ver también la memoria próxima a aparecer, *The geometry of polygenic functions,* Revista de la Universidad Nacional de Tucumán (1943).

4. - *Pseudo-ángulo de Kasner.* — Una hipersuperficie S_{2n-1} definida por la ecuación $F(u_1, u_2, \ldots, u_n;\ v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$, y una curva C definida por las ecuaciones $u_\alpha = u_\alpha(t), v_\alpha = v_\alpha(t)$ para $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, posee el invariante diferencial fundamental de primer orden

$$\vartheta = \frac{1}{2i} \log \left[-\frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} F_{v_\alpha} dv_\alpha}{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} F_{u_\alpha} du_\alpha} \right], \tag{8}$$

respecto al grupo pseudo-conforme continuo infinito G. Este representa el ángulo efectivo ϑ entre la curva dada C y la curva de intersección C' entre la hipersuperficie S_{2n-1} y la superficie conforme única determinada por la curva C.

Este pseudo-ángulo sirve para caracterizar el grupo pseudó-conforme continuo infinito G dentro del grupo de las transformaciones puntuales en el espacio euclidiano $2n$-dimensional R_{2n}. En coordenadas cartesianas este pseudo-ángulo es

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tang} \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} (F_{x_\alpha} dx_\alpha + F_{y_\alpha} dy_\alpha)}{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} (F_{x_\alpha} dy_\alpha - F_{y_\alpha} dx_\alpha)}, \tag{9}$$

donde la ecuación de la hipersuperficie $(2n-1)$-dimensional S_{2n-1} es $F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$, y las ecuaciones paramétricas de la curva C son $x_\alpha = x_\alpha(t)$, $y_\alpha = y_\alpha(t)$, para $\alpha = 1, 2, \ldots, n$.

4. - *Sistemas multi-isotermos de* ∞^{2n-1} *curvas.* — Un sistema de ∞^{2n-1} curvas es multi-isotermo si es equivalente pseudo-conformemente a un haz de ∞^{2n-1} rectas paralelas en R_{2n}. Por medio de (7), es visto que cualquier sistema multi-isotermo de ∞^{2n-1} curvas puede estar dado por un sistema de $(2n-1)$ ecuaciones de la forma

$$\begin{gathered} \lambda_\gamma(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \text{const.} \qquad \mu_\gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \text{const.} \\ \nu(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \omega(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \text{const.}, \end{gathered} \tag{10}$$

donde $\gamma = 1, 2, \ldots, n-1$, y los dos jacobianos $|\partial\lambda_\gamma/\partial u_\alpha|$ y $|\partial\mu_\gamma/\partial v_\alpha|$ son cada uno de característica (rank) $(n-1)$. Por lo tanto, sigue que cualquier sistema tal de ∞^{2n-1} curvas puede ser definido por un sistema de $(2n-1)$ ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{du_1}{A_1(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \ldots = \frac{du_\alpha}{A_\alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \ldots = \frac{du_n}{A_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)},$$

$$(11) \quad \frac{dv_1}{B_1(v_1, v_2, \ldots, v_n)} = \ldots = \frac{dv_\alpha}{B_\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_n)} = \ldots = \frac{dv_n}{B_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)}$$

$$\frac{dv_\alpha}{\delta(v_1, v_2, \ldots, v_n)\, B_\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_n)} = \frac{du_\alpha}{\gamma(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, A_\alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n)}.$$

Recíprocamente las ∞^{2n-1} curvas integrales de cualquier sistema de ecuaciones diferenciales reducibles a la forma (11) es un sistema multi-isotermo.

Puesto que cualquier superficie conforme puede ser definida por ecuaciones de la forma $f_\gamma(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$, $g_\gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$, para $\gamma = 1, 2, \ldots, n-1$, donde los dos jacobianos $|\partial f_\gamma/\partial u_\alpha|$ y $|\partial g_\gamma/\partial v_\alpha|$ son de característica $(n-1)$, sigue por (10) que cualquier sistema multi-isotermo de ∞^{2n-1} curvas consiste de ∞^{2n-2} familias de ∞^1 curvas, cada familia yacente sobre una superficie conforme.

11. - *Sistemas multi-isotermos de ∞^1 hipersuperficies.* — Cualquier sistema de ∞^1 hipersuperficies, el cual es equivalente pseudo-conformemente a un haz paralelo de ∞^1 hiperplanos de $(2n-1)$ dimensiones es dicho ser multi-isotermo. La ecuación

$$(12) \qquad f(u_1, u_2, \ldots, u_n) + g(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \text{const.},$$

define un sistema multi-isotermo de ∞^1 hipersuperficies. En esta forma, la constante es dicha ser un *parámetro multi-isotermo.* El primer miembro de la ecuación anterior representa una función multiarmónica la cual puede ser definida como la parte real (o imaginaria) de una función analítica simple de n variables complejas.

Recíprocamente, sea $F(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ v_1, v_2, \ldots, v_n) = \text{const.}$, que representa un sistema multi-isotermo de ∞^1 hipersuperficies. Debe existir una función $\phi(F)$ la cual es función multiarmónica de (u_α, v_α). Por lo tanto las n^2 fracciones

$$(13) \qquad \Lambda = \frac{F_{u_\alpha v_\beta}}{F_{u_\alpha} F_{v_\beta}}$$

que representan $(n^2 - 1)$ ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden, deben representar la misma cantidad $\Lambda(u_1, u_2, \ldots, u_n; \ v_1, v_2, \ldots, v_n)$, para todos los valores de $\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots, n$. También esta función simple Λ debe ser una función de F solamente. Por lo tanto Λ satisface las $(2n - 1)$ adicionales ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tercer orden

$$(14) \qquad \frac{\Lambda_{u_1}}{F_{u_1}} = \ldots = \frac{\Lambda_{u_n}}{F_{u_n}} = \frac{\Lambda_{v_1}}{F_{v_1}} = \ldots = \frac{\Lambda_{v_n}}{F_{v_n}}.$$

Teorema 1. — *Las condiciones necesarias y suficientes para que $F(u_1, u_2, \ldots, u_n; \ v_1, v_2, \ldots, v_n) = const.$ defina un sistema multi-isotermo de hipersuperficies es que F verifique el sistema de $(n^2 + 2n - 2)$ ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tercer orden, dado por (13) y (14).*

Sustituyendo (11) y (12) en la fórmula (8) que define el pseudo-ángulo ϑ, obtenemos el resultado siguiente.

Teorema 2. - *El pseudo-ángulo entre cualquier sistema multi-isotermo de ∞^1 hipersuperficies y cualquier sistema multi-isotermo de ∞^{2n-1} curvas es una función multiarmónica de (u_α, v_α); esto es, ϑ es de la forma $\vartheta = h(u_1, u_2, \ldots, u_n) + k(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.*

En la parte siguiente, darémos ciertos teoremas los cuales pueden ser considerados como extensiones de ciertos teoremas de Kasner que caracterizan funciones multiarmónicas.

7. - *Sistemas multi-isotermos de ∞^1 hipersuperficies y superficies conformes.* — Una superficie conforme S_2 induce $(n - 1)$ correspondencias conformes entre el conjunto elegido de n planos coordenados cuyas coordenadas cartesianas son $(x_\alpha, \ y_\alpha)$

para $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Así, cualquier S_2 tal puede ser definido por las $(2n-2)$ ecuaciones $u_\gamma = u_\gamma(u_1)$, $v_\gamma = v_\gamma(v_1)$, donde $\gamma = 2, 3, \ldots, n$. Por las correspondencias conformes inducidas, es visto que un sistema isotermo en el plano coordenado (x_1, y_1) corresponde a un sistema isotermo en el plano (x_γ, y_γ), para $\gamma = 2, 3, \ldots, n$; y a un sistema isotermo sobre la superficie conforme S_2.

Teorema 3. - *Cualquier sistema multi-isotermo de ∞^1 hipersuperficies de R_{2n} es seccionado por una superficie conforme en un sistema isotermo.*

Este resultado es obtenido sustituyendo en la ecuación (12), que define un sistema multi-isotermo de hipersuperficies, las ecuaciones de una superficie conforme.

Teorema 4. - *Si una superficie es seccionada por cada sistema multi-isotermo de ∞^1 hipersuperficies en un sistema isotermo de curvas, entonces la superficie es una superficie conforme.*

Cualquier superficie S_2 puede ser dada por las ecuaciones $u_\gamma = u_\gamma(u_1, v_1)$, $v_\gamma = u_\gamma(u_1, v_1)$, para $\gamma = 2, 3, \ldots, n$. Sustituyendo ésta en la ecuación (12) que define cualquier sistema multi-isotermo, el sistema resultante de ∞^1 curvas debe ser isotermo. Por lo tanto

$$
(15) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u_1 \; \partial v_1} \log \left[\frac{f_{u_1} + \sum\limits_{\gamma=2}^{n} \left(f_{u_\gamma} \dfrac{\partial u_\gamma}{\partial u_1} + g_{v_\gamma} \dfrac{\partial v_\gamma}{\partial u_1} \right)}{g_{v_1} + \sum\limits_{\gamma=2}^{n} \left(g_{v_\gamma} \dfrac{\partial v_\gamma}{\partial v_1} + f_{u_\gamma} \dfrac{\partial u_\gamma}{\partial v_1} \right)} \right] = 0.
$$

La anterior debe ser una identidad para todos los valores de las derivadas parciales de f y g.

La ecuación precedente contiene derivadas parciales de tercer orden en f y g. Poniendo iguales a cero los coeficientes de $f_{u_1 u_1 u_\gamma}$ y $g_{v_1 v_1 v_\gamma}$, encontramos que $\partial u_\gamma / \partial v_1 = 0$ y $\partial v_\gamma / \partial u_1 = 0$. Esto prueba que la superficie S_2 es conforme. De este modo el Teorema 4 está completamente demostrado.

Teorema 5. - *Si un sistema dado de ∞^1 hipersuperficies es seccionado por cada superficie conforme en una familia isoterma de curvas, entonces el sistema de ∞^1 hipersuperficies es multi-isotermo.*

Sea $F(u_1, u_2, \ldots, u_n;\ v_1, v_2, \ldots, v_n) = \text{const.}$ el sistema dado de ∞^1 hipersuperficies. Sustituyendo en él las ecuaciones de cualquier superficie conforme $u_\gamma = u_\gamma(u_1)$, $v_\gamma = v_\gamma(v_1)$, donde $\gamma = 2, 3, \ldots, n$, la familia resultante debe ser isoterma. De este modo tenemos

$$(16) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u_1 \ \partial v_1} \log \left[\frac{F_{u_1} + \sum\limits_{\gamma=2}^{n} F_{u_\gamma} \dfrac{du_\gamma}{du_1}}{F_{v_1} + \sum\limits_{\gamma=2}^{n} F_{v_\gamma} \dfrac{dv_\gamma}{dv_1}} \right] = 0.$$

La anterior es una ecuación diferencial de segundo orden en las derivadas totales de $u_\gamma = u_\gamma(u_1)$, $v_\gamma = v_\gamma(v_1)$, debiendo ser idénticamente cero. Poniendo iguales a cero los coeficientes de $d^2u_\gamma/du^2{}_1$ y $d^2v_\gamma/dv^2{}_1$, hallamos

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v_1}\left[F_{u_\delta} / (F_{u_1} + \sum_{\gamma=2}^{n} F_{u_\gamma} \frac{du_\gamma}{du_1}) \right] = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial u_1}\left[F_{v_\delta} / (F_{v_1} + \sum_{\gamma=2}^{n} F_{v_\gamma} \frac{dv_\gamma}{dv_1}) \right] = 0. \end{aligned}$$

Estas identidades dan las $(n^2 - 1)$ ecuaciones (13).

Sustituyendo las ecuaciones (13) en la condición (16), tenemos

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial u_1}\left[Fv_1 + \sum_{\gamma=2}^{n} Fv_\gamma \frac{dv_\gamma}{dv_1} \right] \Lambda = \frac{\partial}{\partial v_1}\left[Fu_1 + \sum_{\gamma=2}^{n} Fu_\gamma \frac{du_\gamma}{du_1} \right] \Lambda.$$

Poniendo iguales a cero los varios coeficientes de du_γ/du_1 y dv_γ/dv_1 en la ecuación anterior, obtenemos las condiciones (14).

Así la hipótesis del Teorema 5 nos ha conducido a las condiciones (13) y (14) para un sistema multi-isotermo de ∞^1 hipersuperficies. Esto completa nuestra demostración del Teorema 5.

Columbia University
New York, New York

Illinois Institute of Technology
Chicago, Illinois

MOVIMIENTO DE FOTONES EN UN MEDIO MATERIAL

por

A. Battig
Instituto de Física; Universidad Nacional de Tucumán

Summary. — The well-known transformation properties of energy, momentum, frequency and wave vector of particles and electromagnetic radiation can be systematically derived from the transformation properties of the energy-momentum vector entering the relation

$$p_0^2 - p^2 = m^2c^2.$$

While real values of m correspond to material particles and photons ($m = 0$) in vacuum, imaginary values of m correspond to photons in a continously distributed medium of refracting index n. The particle picture of radiation can be maintained even in a material medium and remains compatible with energy and momentum expressions resulting from Maxwell's theory. Applied to the Cherenkov effect (R. T. Cox) the particle picture permits to account for the recoil of Cherenkov's electrons. The quantised expressions for energy and momentum of a photon in a material medium refer, however, not to total energy and momentum of the system, but rather to *free* energy (aud momentum) in the sense of thermodynamics.

Introducción. — El descubrimiento del efecto de *Cherenkov* motivó un estudio más profundo de los fenómenos electromagnéticos en medios materiales. Recién, *R. T. Cox* (2) mostró que el concepto de fotón se presta para ser empleado con éxito, incluso el caso del mencionado efecto. Por otra parte, *J. Würschmidt* (1) acaba de estudiar en un interesante artículo, las fórmulas del efecto *Doppler*, de la aberración de la luz y de la presión luminosa, desde el punto de vista de la imagen de los fotones.

El propósito del presente trabajo es vincular las fórmulas obtenidas, con las correspondientes del campo electromagnético y las de las partículas materiales estudiando en detalle el significado físico de las magnitudes introducidas.

§ 1. *Definiciones generales.* — Sabemos por el dualismo ondulatorio corpuscular que a una partícula material de masa m, que se mueve con velocidad constante v, debemos asignarle una onda que se propaga en la dirección de movimiento y cuyas características físicas son las siguientes:

(por la teoría de la Relatividad) $$W=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \vec{p}=\frac{m.\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \beta=\frac{v}{c}$$

donde W es la energía de la partícula y $\vec{p}$ es el impulso. Por el concepto dualista tenemos:

(por la teoría ondulatoria) $$W=h\,.\,\nu,\quad \vec{p}=\frac{h.\nu}{V}\,.\,\vec{j}$$

siendo ν la frecuencia de la onda asociada, $\vec{j}$ el vector unitario de dirección y V la velocidad de fase.

Una onda plana monocromática se expresa por la ecuación siguiente:

$$\vec{E}=\vec{E}_0\, e^{i(k_0 ct-\vec{k}\vec{r})}$$

donde $\vec{E}_0$ es un vector constante que mide la amplitud de la onda. El frente de onda está determinado por el exponente, en el cual $k_0, \vec{k}$ constituye el cuadrivector de onda. Por el dualismo ondulatorio-corpuscular definimos las siguientes magnitudes:

(I) cuadrivector de onda $\left\{\begin{array}{l} k_0 \\ \vec{k} \end{array}\right.$ cuadrivector de energía impulso de una partícula $\left\{\begin{array}{l} p_0=\dfrac{h}{2\pi}k_0 \\ \vec{p}=\dfrac{h}{2\pi}\vec{k} \end{array}\right.$

Observamos que las magnitudes $k_0, \vec{k}$ están relacionadas con las magnitudes $p_0, \vec{p}$ por medio de la constante $\frac{h}{2\pi}$, de modo que toda relación establecida entre las primeras nos determina la relación entre las últimas. De las magnitudes definidas en (I) podemos escribir:

$$\frac{v}{c}=\frac{p}{p_0}\ , \quad \frac{V}{c}=\frac{k_0}{k};$$

luego, de estas dos expresiones, obtenemos inmediatamente:

$$(A) \qquad V \, . \, v = c^2.$$

Por las relaciones generales que existen entre las cantidades dadas por la teoría corpuscular (I) podemos escribir:

$$(1) \qquad p_0{}^2 - p^2 = m^2\, c^2,$$

esta ecuación determina la masa m que es invariante respecto a una transformación de *Lorentz*.

De la ecuación (1) podemos considerar dos casos:

a) *Partículas de masa* $m > 0$. - Este caso corresponde a partículas como ser electrones, protones, etc. Sabemos que la velocidad de fase V es mayor que la velocidad de la luz y que la velocidad de grupo v es menor. Si se considera el movimiento de electrones, las ondas electrónicas asociadas tienen velocidad de fase $V > c$. Para el caso de electrones en reposo corresponde $V = \infty$.

b) *Partículas de masa* $m = 0$. - Este caso corresponde a «fotones». La velocidad de propagación de fotones en el vacío es c y por lo tanto la velocidad de fase será $V = c$. Hacemos notar que en este caso las ondas asociadas son las ondas electromagnéticas en el vacío.

Los casos a) y b) han sido estudiados en detalle y constituyen aplicaciones particulares de la ecuación general (1). De esta misma ecuación deduciremos otro caso, que es el que nos interesa, correspondiente a *fotones en un medio material,* en la aproximación para la cual el medio puede ser esquematizado por un continuo y caracterizado por un índice de refracción $n > 1$.

§ 2. *Fotones en un medio material de índice de refracción n. Angulo de aberración. Efecto Doppler.* — Consideremos nuevamente la ecuación general (1). Por medio del cuadrivector k_0, k definimos el índice de refracción n en un medio material en reposo, por la siguiente relación:

$$n = \frac{k}{k_0},$$

o sea que

$$n^2 k_0{}^2 - k^2 = 0$$

luego

$$(1\,a) \qquad k_0{}^2 - k^2 = (1 - n^2)\, k_0{}^2; \quad p_0{}^2 - p^2 = (1 - n^2)\, p_0{}^2$$

pero por ser $(1 - n^2)$ una magnitud negativa, podemos escribir la relación anterior como sigue:

$$k_0{}^2 - k^2 = -\varkappa^2, \; (*)$$

siendo $-\varkappa^2 = \left(\frac{2\pi mc}{h}\right)^2$. La ecuación (1) es invariante, y se cumple en este caso para la masa imaginaria $m = i\,.\,\mu$. Observamos, pues, que a fotones en un medio material de índice $n > 1$, debemos asignarle una masa imaginaria. De este modo tenemos los casos posibles comprendidos en la ecuación (1) y los agrupamos de la manera siguiente:

$$k_0{}^2 - k^2 = \begin{cases} 0 \\ \varkappa^2 \\ -\varkappa^2 \end{cases} \quad p_0{}^2 - p^2 = \begin{cases} 0 & p_0 = p & m = 0 \\ m^2\, c^2 & p_0 > p & m > 0 \\ -\mu^2\,.\,c^2 & p_0 < p & m = i\,.\,\mu. \end{cases}$$

Los dos primeros casos corresponden a los mencionados en el § 1. El último corresponde al encabezamiento de este parágrafo.

Hemos dicho que a una partícula de energía W debemos asignarle una onda asociada de frecuencia ν. La velocidad de la luz en el medio material es $\frac{c}{n}$, luego, por la ecuación (A) debemos asignarle a la partícula asociada al fotón la velocidad

(*) Esta invariante es equivalente a la última relación del trabajo citado del Dr. Würschmidt (esta revista, p. 68) y aclara su significado físico.

$v = \frac{c^2}{V}$, siendo $V = \frac{c}{n}$; la energía y el impulso del fotón serán:

$$W = h \cdot \nu, \qquad \vec{p} = \frac{h\nu}{V} = n \cdot \frac{h\nu}{c} \neq n \cdot \vec{p}_0 \; (**)$$

siendo $\vec{p}_0 = \frac{h.\nu}{c}$. Si consideramos un medio material *no-dispersivo,* la velocidad de grupo será $V < c$.

Observamos, entonces, que un fotón al pasar del vacío al medio material de índice n varía su impulso de p_0 a $n \cdot p_0$.

Pasaremos, ahora, a considerar expresiones que nos darán el ángulo de aberración y el efecto Doppler. Para ello consideremos dos sistemas de referencia, S y S'. Sea el primero fijo al medio material y el segundo se mueve respecto al primero con una velocidad constante u, de modo tal, que los ejes $z - z'$ permanecen superpuestos y los otros dos paralelos entre sí. Un observador de S' observará un ángulo de aberración y, además, un efecto Doppler. Llamaremos V', v', ϑ', φ' las magnitudes definidas en el sistema S' y cuyo significado es el siguiente:

(2) $V' = c \frac{k_0'}{k'}$ velocidad de fase de la onda

(3) $v' = c \frac{p'}{p_0'} = c \frac{k'}{k_0'}$ velocidad de la partícula

(4) $\cos \vartheta' = \frac{k_z'}{k'} = \frac{p_z'}{p'}$ ángulo de aberración

(**) Según esta relación resulta siempre, aunque pequeño sea el valor de V, la expresión de MAXWELL,

$$P = 2.D \quad (D = \text{densidad de energía})$$

para la presión P de luz reflejada perpendicularmente por un espejo perfecto al reposo en el medio, de acuerdo con la electrodinámica. Efectivamente, incluso en el caso $V/c \ll 1$, los corpúsculos asociados obedecen fórmulas relativistas,

$$p_0 = \frac{i \mu c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \frac{i \mu \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad v/c = c/V > 1$$

cualquiera sea el valor de V. El Dr. Würschmidt, l. c. pág. 64 fórmula (1,8), llega formalmente a una relación distinta, la de NEWTON, porque define, en este caso particular, otra densidad de energía, considerando la energía cinética $p^2/2m$ para partículas de masa real m.

(5) $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{k_y'}{k_x'} = \frac{p_y'}{p_x'}$ ángulo de dirección de movimiento.

La transformación de *Lorentz* para el cuadrivector de energía-impulso nos da:

$$p_x = p_x', \quad p_y = p_y', \quad p_z' = \frac{p_z - \beta p_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_0' = \frac{p_0 - \beta p_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Reemplazando en la fórmula (2) los valores anteriores obtenidos de la transformación de *Lorentz*, encontramos después de algunas simplificaciones el siguiente resultado:

$$(6) \qquad V' = c \frac{1 - n\beta \cos \vartheta}{\sqrt{n^2(1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) - 2n\beta \cos \vartheta + \beta^2}}$$

Por las fórmulas (4) y (5) tenemos:

$$(7) \qquad \cos \vartheta' = \frac{n \cos \vartheta - \beta}{\sqrt{n^2(1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) - 2n\beta \cos \vartheta + \beta^2}}, \qquad \varphi' = \varphi.$$

Para el efecto *Doppler* obtenemos inmediatamente:

$$(8) \qquad \nu' = \nu \frac{1 - n\beta \cos \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

El impulso p' es:

$$p' = \sqrt{p_0'^2 + \mu^2 c^2}$$

Teniendo presente que $\mu c = \sqrt{\left(n \frac{h\nu}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2}$ y el valor de p_0' determinado anteriormente, obtenemos:

$$(9) \qquad p' = \frac{p_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{n^2(1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) - 2n\beta \cos \vartheta + \beta^2}$$

Las fórmulas (6) — (9) presentan particular interés para $1 - n\beta \cos \vartheta = 0$

(6′) $$V' = 0$$

(7′) $$\cos \vartheta' = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{n^2-1}}$$

(8′) $$\nu' = 0$$

(9′) $$p' = p_0\sqrt{n^2-1}.$$

Concluímos que en S' la onda electromagnética tiene una velocidad nula, a pesar que el observador se desplaza con respecto al sistema S en una dirección que forma un ángulo ϑ con la normal de la onda. Además, en el sistema S' se anula la frecuencia ν' y, en consecuencia, la energía $h \cdot \nu'$. No se anula, sin embargo, el impulso p'. El cono,

$$\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta}$$

sobre el cual se anula la velocidad V', determina la dirección de la radiación de *Cherenkov* emitida por un electrón en reposo en este sistema, como se verá, más en detalle, en el parágrafo 4.

Las fórmulas (6), (7) y (8) corresponden a las fórmulas (2, 2) y (2, 5) dadas por el Prof. J. Würschmidt, l. c. pág. 55.

§ 3. *Cálculo de la densidad de energía e impulso de la radiación.* — Un campo electromagnético caracterizado por las intensidades $\vec{E}$, $\vec{H}$, por la densidad de carga ρ y por la densidad de corriente $\vec{i}$, está completamente determinado por las ecuaciones de *Maxwell-Lorentz* en un sistema $S(x, y, z, t)$ respecto al cual el medio está en reposo:

(10) $$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{i}$$

(11) $$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

(12) $$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

(13) $$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$$

(14) $$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

(15) $$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

(16) $$\vec{i} = \rho\vec{v}.$$

Multiplicando escalarmente (10) por $\vec{E}$ y (11) por $\vec{H}$ y simplificando tenemos:

(17) $$\frac{1}{4\pi}\left(\vec{H} \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) + \operatorname{div}\frac{4\pi}{c}[\vec{E}, \vec{H}] + \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{E} = 0.$$

El primer sumando de la ecuación (17) representa el cambio de la energía electromagnética. Si consideramos variaciones de $\vec{B}$ y $\vec{D}$ infinitesimales, podemos escribir el incremento de la energía electromagnética por unidad de volumen:

$$\frac{1}{4\pi}(\vec{H} \cdot d\vec{B} + \vec{E} \cdot d\vec{D}),$$

o, en forma integral:

(18) $$\frac{1}{4\pi}\int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B} + \int_0^D \vec{E} \cdot d\vec{D}.$$

Por las relaciones (14), (15) tenemos:

(19) $$\int_\tau d\tau\left(\frac{\mu}{4\pi}\int_0^H \vec{H} \cdot d\vec{H} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^E \vec{E} \cdot d\vec{E}\right) = \frac{1}{8\pi}\int_\tau (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})\, d\tau.$$

Determinaremos, ahora, en forma breve, el impulso electromagnético. La fuerza que actúa sobre todas las cargas contenidas en el volumen τ se expresa por la ecuación de *Lorentz*:

(20) $$\vec{F} = \int_\tau \rho\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{B}]\right) d\tau.$$

Reemplazando los valores de ρ y $\frac{v}{c}$ dados por (13) y (10) se obtiene

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \left\{ \vec{E} \,.\, \operatorname{div} \vec{D} + [\operatorname{rot} \vec{H}, \vec{B}] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{B}\right] \right\} d\tau,$$

de las ecuaciones (11) — (12) tenemos:

$$0 = \int_\tau \left\{ \vec{H} \,.\, \operatorname{div} \vec{B} + [\operatorname{rot} \vec{E}, \vec{D}] + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{D}\right] \right\} d\tau,$$

y sumando estas dos últimas ecuaciones:

$$(21) \qquad 4\pi\vec{F} = \int_\tau \left\{ \vec{E} \,.\, \operatorname{div} \vec{D} + [\operatorname{rot} \vec{H}, \vec{D}] + [\operatorname{rot} \vec{E}, \vec{D}] - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\vec{D}, \vec{B}] \right\} d\tau.$$

La integral sobre los términos que contienen derivadas espaciales corresponde a las tensiones de *Maxwell*, $\int \operatorname{div} \overrightarrow{T} \,.\, d\tau$, y se anula en el caso de un sistema finito. El valor de $\frac{1}{4\pi c}\int_\tau [\vec{D}, \vec{B}]\, d\tau$ se interpreta como impulso electromagnético contenido en el volumen τ. La densidad de impulso será entonces

$$(22) \qquad \vec{g} = \frac{1}{4\pi c}[\vec{D}, \vec{B}].$$

Demostraremos, ahora, la equivalencia entre la imagen corpuscular adoptada y la imagen ondulatoria clásica. Consideremos la propagación de una onda electromagnética plana que forma con el eje z un ángulo ϑ. Admitamos que el dieléctrico en el cual se propaga la perturbación electromagnética es homogéneo y que no contiene cargas libres. En estas condiciones, se obtiene de las ecuaciones (10) — (15) con un vector $\vec{A}$ convenientemente introducido:

$$\text{(II)} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \vec{D} = \sqrt{\varepsilon}\,\vec{A}$$

$$\vec{H} = + \frac{[\vec{j}, \vec{A}]}{\sqrt{\mu}} \qquad \vec{B} = + \sqrt{\mu}\,[\vec{j}, \vec{A}],$$

donde $\vec{j}$ es el versor de dirección. Si, en particular, el plano de polarización de la onda es $(x - z)$, se tiene:

$$\text{(III)} \qquad \begin{matrix} j_x = \operatorname{sen} \vartheta & j_y = 0 & j_z = \cos \vartheta \\ A_x = A \,.\, \cos \vartheta & A_y = 0 & A_z = - A \,.\, \operatorname{sen} \vartheta \end{matrix}$$

siendo $A^2 = \varepsilon\,(E_x{}^2 + E_y{}^2 + E_z{}^2) = \mu\,(H_x{}^2 + H_y{}^2 + H_z{}^2)$.

Las ecuaciones (II) se refieren al sistema S, fijo en el medio material. Para el sistema S' que se mueve respecto a S con velocidad constante u, los vectores eléctrico y magnético se transforman según:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} E'_x &= \frac{E_x - \beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & D'_x &= \frac{D_x - \beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ E'_y &= \frac{E_y + \beta B_x}{\sqrt{1-\beta^2}} & D'_y &= \frac{D_y + \beta H_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ E'_z &= E_z & D'_z &= D_z \\ B'_x &= \frac{B_x + \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & H'_x &= \frac{H_x + \beta D_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ B'_y &= \frac{B_y - \beta E_x}{\sqrt{1-\beta^2}} & H'_y &= \frac{H_y - \beta D_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ B'_z &= B_z & H'_z &= H_z. \end{aligned}$$

Reemplazando en (IV) las respectivas componentes dadas por las relaciones (II)—(III), obtenemos las componentes de la densidad de impulso electromagnético transformada

$$g'_x = \frac{1}{4\pi c}[\vec{D}', \vec{B}']_x = \frac{A^2}{4\pi c\sqrt{1-\beta^2}}(n - \beta\cos\vartheta) \,.\, \text{sen}\,\vartheta$$

$$g'_Y = \frac{1}{4\pi c}[\vec{D}', \vec{B}']_Y = 0$$

$$g'_z = \frac{1}{4\pi c}[\vec{D}', \vec{B}']_z = \frac{A^2}{4\pi cn(1-\beta^2)}(n - \beta\cos\vartheta) \,.\, (n \,.\, \cos\vartheta - \beta)$$

$$g' = \frac{A^2\left(1 - \frac{\beta}{n}\cos\vartheta\right)}{4\pi c(1-\beta^2)}\sqrt{n^2 \,.\, (1 - \beta^2\,\text{sen}^2\,\vartheta) - 2n\beta\cos\vartheta + \beta^2}$$

y para la densidad de energía:

$$w' = \frac{A^2}{4\pi n(1-\beta^2)}(1 - n\beta\cos\vartheta)\,(n - \beta\cos\vartheta)$$

Si consideramos un volumen τ de radiación y observando que:

$$\tau' = \tau\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta}{n}\cos\vartheta},$$

obtenemos para el impulso y la energía:

$$G' = \int_\tau g'\,d\tau' = \frac{G}{n}\,\frac{\sqrt{n^2(1-\beta^2\,\text{sen}^2\,\vartheta) - 2n\beta\cos\vartheta + \beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{G}{n}\,\frac{R}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$W' = \int_{\tau'} w' \,.\, d\tau' = W\,\frac{1 - n\beta\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

con

$$R = \sqrt{n^2(1-\beta^2\,\text{sen}^2\,\vartheta) - 2n\beta\cos\vartheta + \beta^2}$$

y mediante las ecuaciones (II)—(III):

$$G = \frac{n \,.\, A^2 \,.\, \tau}{4\pi c}$$

$$W = \frac{A^2 \,.\, \tau}{4\pi}.$$

Calculando las mismas magnitudes por medio de la imagen corpuscular, adoptada anteriormente, tenemos para el sistema S':

(según (9))

$$p' = \frac{p}{n} \frac{\sqrt{n^2(1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) - 2n\beta \cos \vartheta + \beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{G}{n} \cdot \frac{R}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(según (8)) $\quad c \,.\, p_0' = h\nu \dfrac{1-n\beta \cos \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}} = W \dfrac{1-n\beta \cos \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

y para el sistema S:

$$p = n \frac{h\nu}{c} = G$$

$$c \,.\, p_0 = h \,.\, \nu = W.$$

Comparando, entonces, los resultados obtenidos para el impulso electromagnético y la energía por medio de la imagen ondulatoria clásica y la corpuscular, observamos que existe identidad entre G' con p', y entre W' con $c \,.\, p'_0$. Esto nos demuestra la compatibilidad entre las dos imágenes adoptadas.

§ 4. *Cálculo del retroceso del electrón* [2]. — Admitiendo que que el electrón (bajo ciertas condiciones) emite espontáneamente un fotón, podemos calcular el retroceso que sufre a causa de la emisión, partiendo de las ecuaciones de conservación de energía y de impulso del electrón y del fotón. En el sistema de referencia S', en el cual el electrón está inicialmente en reposo, la conservación de energía e impulso se expresa respectivamente por las ecuaciones

$$m \cdot c = P'_0 + p'_0$$
$$P'^2 = p'^2$$

donde $cP_0' = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $cp_0' = h\nu'$ representan respectivamente la energía del electrón y del fotón, después de la emisión, en el sistema S'. P' y p' representan los impulsos después de la emisión. Se observa inmediatamente que las dos ecuaciones no pueden tener solución si no podemos atribuir un valor negativo a p'_0. Tal signo de la energía puede ocurrir solamente en un medio material en las condiciones determinadas por la relación (8).

Tomando el cuadrado de la primera ecuación y restando la segunda obtenemos fácilmente

$$m^2 c^2 - 2 \cdot m \cdot c \cdot p_0' + p_0'^2 - p'^2 = P_0'^2 - P'^2 = m^2 c^2$$

y dado que según (1 a),

$$p'_0{}^2 - p'^2 = (1 - n^2) \cdot p_0{}^2$$

(cp_0 = energía del fotón en el sistema de reposo S del medio), concluímos

$$(1 - n^2) \cdot p_0{}^2 = 2 \cdot m \cdot c \cdot p_0'.$$

Recordando que, según (8),

$$p'_0 = p_0 \frac{1 - n\beta \cos \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

obtenemos la fórmula de *Cox* para el efecto de *Cherenkov*:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta} + \left(n - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{p_0 \sqrt{1-\beta^2}}{2m.\beta.c} \; .$$

La emisión espontánea del fotón se efectúa, pues, en una dirección muy próxima a la del cono de *Cherenkov*. El segundo término, que representa la corrección de *Cox*, debido al retroceso del electrón, es prácticamente despreciable frente al primero, puesto que $p_0/m \,.\, c = h\nu/mc^2 \ll 1$ para fotones de luz visible.

§ 5. *Algunas observaciones sobre la energía.* — La interpretación de las expresiones

$$(23) \qquad \frac{1}{8\pi}\int_\tau (\vec{E}\,.\,\vec{D}+\vec{H}\,.\,\vec{B})\,.\,d\tau$$

$$(24) \qquad \frac{1}{4\pi c}\int [\vec{D},\vec{B}]\,d\tau$$

como energía e impulso del sistema, se justifica por las relaciones (17) y (21), según las cuales la derivada de las cantidades mencionadas equivalen a la potencia y a la fuerza ejercidas por el sistema. Como observó *R. Becker* (3), no es unívoca si no fijamos simultáneamente las características termodinámicas del medio material. *Becker* muestra, en el caso restringido de la electro y magnetostática, que las relaciones (17) y (21) pueden ser aplicadas unívocamente sólo a procesos isotérmicos, es decir, que la expresión (23) representa la energía *libre* del sistema,

$$\frac{1}{8\pi}\int (\vec{E}\,.\,\vec{D}+\vec{H}\,.\,\vec{B})\,.\,d\tau = U - TS = F$$

(U = energía interna, T = temperatura absoluta, S = entropía).

Los procesos que hemos discutido más arriba, permiten añadir que un fotón que entra en un medio material, cambia en general su energía y su impulso (*) e intercambia, pues, energía e impulso con el medio. Luego las expresiones (23) y (24) no representan la energía y el impulso total del sistema y tienen, más bien, que ser interpretadas como generalizaciones relativistas de la *energía libre.*

Notamos, en particular, que el tensor de energía e impulso «libre» deja de ser simétrico y que el flujo de energía libre no es igual al «impulso libre».

(*) En el caso particular de un medio material en reposo, la energía y la frecuencia del fotón no sufren cambio, sin embargo el impulso aumenta en un factor n.

Concluímos, entonces, que la energía $h\nu$ y el impulso $n.\frac{h\nu}{c}$ que tenemos que atribuir a un fotón en un medio material, no representan la energía y el impulso total, sino energía e impulso «libre» del sistema. Este resultado aclara el hecho, a primera vista sorprendente, que tenemos que atribuir, en ciertos casos, a un campo electromagnético en un medio material valores negativos de la energía (libre).

CONCLUSIONES

1. - El movimiento de una partícula material, de un fotón en el vacío y de un fotón en un medio material, pueden ser considerados desde un punto de vista uniforme, correspondiendo respectivamente a una masa positiva, cero e imaginaria.

2. - Las fórmulas de transformación de *Lorentz* aplicadas a los cuadrivectores de onda y de energía-impulso, nos conducen inmediatamente a las fórmulas del efecto *Doppler*, de la aberración y del impulso de la radiación. Estas fórmulas han sido obtenidas recientemente por el Prof. J. Würschmidt.

3. - Aplicados a ondas emitidas por una carga en movimiento rápido $u > V$, los fotones definidos anteriormente permiten dar una interpretación corpuscular del efecto de *Cherenkov* y tener en cuenta, además, el retroceso del electrón emisor (Cox).

4. - Las cantidades de energía e impulso atribuídas a los fotones en un medio material, se refieren a la energía e impulso «libre» y no a la energía e impulso total.

Agradecimientos. — Deseo expresar mis agradecimientos al Director del Instituto de Física Prof. Dr. J. Würschmidt y al Prof. Dr. G. Beck por las numerosas indicaciones sugeridas durante la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

(1) J. Würschmidt. *Aberración, efecto Doppler y presión de luz.* Revista de la Unión Matemática Argentina. Vol. XI, págs. 47-68 (1945).

(2) R. T. Cox. Phys. Rev., *66*, 106 (1944).

(3) R. Becker. *Theorie der Electrizität.* Leipzig, B. G. Teubner, Berlin. 1933. Band I.

SOBRE UN PROBLEMA DE JUAN BERNOULLI

(Primera Parte)

por J. V. USPENSKY

1. — Juan Bernoulli referido en el título no era aquel matemático famoso que tanto contribuyó al desarrollo del cálculo infinitesimal, sino su nieto Juan Bernoulli III (1744 - 1807), socio de la Real Academia de Berlín en cátedra de Astronomía. En el año 1772 él publicó un libro, *Recueil pour les Astronomes*, donde se trata principalmente de cuestiones astronómicas. Lo que nos interesa particularmente es el capítulo *Sur une nouvelle espèce de calcul*, donde encontramos un problema matemático muy curioso y útil.

Sea x un número real y positivo. Muy a menudo se necesita construir una tabla de los enteros próximos a múltiplos de x:

$$x,\ 2x,\ 3x,\ 4x,\ \ldots$$

Llamando a a la parte entera de x se ve fácilmente que al pasar de un múltiplo al múltiplo siguiente el aumento del entero próximo es a o $a+1$. Si tuviéramos reglas expeditas para juzgar cuándo el tal aumento es a o $a+1$, podríamos construir rápidamente la tabla requerida empleando sólo adiciones. Con tal objeto Juan Bernoulli propone, sólo para x racional, reglas muy cómodas, pero sin demostración. La demostración de estas reglas con algunas consideraciones generales y muy importantes sobre el problema de Bernoulli se halla en un artículo interesante de A. Markoff: *Sur une question de Jean Bernoulli* (*), el único trabajo sobre dicho problema que conocemos. Como la solución del problema de Bernoulli proporciona una aplicación hermosa de las fracciones continuas no juzgamos sin interés presentar en este artículo la solución detallada principalmente interesante en caso de x irracional o racional, pero expresado como razon de grandes números.

(*) Mathematische Annalen 19 (1882), p. 26-36.

2. — Según costumbre designaremos con $[\xi]$ la parte entera de un número real ξ, es decir el único entero tal que

$$[\xi] \leqq \xi < [\xi] + 1.$$

El entero próximo a ξ, para lo cual emplearemos el signo $\{\xi\}$, está únicamente determinado por dos desigualdades

$$\{\xi\} - \frac{1}{2} \leqq \xi < \{\xi\} + \frac{1}{2}$$

de donde sigue que siempre

$$\{\xi\} = \left[\xi + \frac{1}{2}\right].$$

Consideremos ahora la función lineal

$$mx + b$$

de un entero variable m, donde x y b son números reales dados. Tenemos

$$mx + b = [mx + b] + \vartheta$$

donde

$$0 \leqq \vartheta < 1.$$

Llamando a a la parte entera de x tenemos también

$$x = a + \omega, \quad 0 \leqq \omega < 1.$$

Puesto que

$$(m + 1)\, x + b = [mx + b] + a + \vartheta + \omega$$

y la parte entera de $\vartheta + \omega$, por ser

$$0 \leqq \vartheta + \omega < 2,$$

no tiene otro valor sino 0 o 1, concluimos que la cantidad

$$K_m = [(m+1)\,x + b] - [mx + b]$$

tiene uno de dos valores: a o $a+1$. A la serie

$$K_0,\ K_1,\ K_2, \ldots$$

compuesta sólo de números a o $a+1$ llamaremos en lo sucesivo serie de Bernoulli (x, b).

Ganaremos en simplicidad de escritura sin perder nada en generalidad suponiendo de ahora en adelante que

$$0 < x < 1.$$

Entonces la serie de Bernoulli (x, b)

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ \ldots$$

aparece como una sucesión determinada de ceros y unidades. Puede ser que cero se repite sucesivamente, por ejemplo, 7 veces. En vez de escribirlo 7 veces, escribiremos 0^7 y lo mismo haremos con unidades que ocurren en sucesión. También puede ser que un grupo de ceros y unidades se repite sucesivamente, por ejemplo el grupo $0^3\,1\,0^2\,1$ se repite tres veces. En tal caso en vez de escribir

$$0^3\,1\,0^2\,1\,0^3\,1\,0^2\,1\,0^3\,1\,0^2\,1$$

escribiremos

$$(0^3\,1\,0^2\,1)^3.$$

Con tal convenio presentaremos la estructura de una serie de Bernoulli con mayor simplicidad. Por ejemplo

$$0^2\,1\,(0\,1)^2\,(0^2\,1\,(0\,1)^3)^4$$

representa 43 términos de la serie de Bernoulli $\left(\frac{19}{43}, 0\right)$.

3. — Para x racional representado por una fracción irreducible $\frac{P}{Q}$ la serie de Bernoulli (x, b) tiene algunas propiedades que vale la pena de mencionar.

1. La serie $\left(\frac{P}{Q}, b\right)$ es periódica y su período consta de Q términos

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{Q-1}$$

En efecto, para cada valor entero de m tenemos

$$[(m+Q)\frac{P}{Q}+b]=[m\frac{P}{Q}+b]+P,$$

de lo que sigue

$$K_{m+Q}=K_m;\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

2º. En el período

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{Q-1}$$

hay siempre P unidades y, por consiguiente, $Q-P$ ceros, pues de la definición misma de K_m se deduce

$$K_0+K_1+\ldots+K_{Q-1}=[Q\,.\,\frac{P}{Q}+b]-[b]=P.$$

3º. Sea ρ la parte entera de Qb de modo que

$$Qb=\rho+\vartheta;\quad 0\leqq\vartheta<1.$$

Entonces

$$m\frac{P}{Q}+b=m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}+\frac{\vartheta}{Q}$$

y como

$$m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}=[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}]+\frac{r_m}{Q},$$

donde

$$0 \leqq r_m \leqq Q-1,$$

tendremos

$$m\frac{P}{Q}+b=\left[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}\right]+\frac{r_m+\vartheta}{Q}.$$

Pero siempre

$$0 \leqq r_m+\vartheta < Q$$

y por consiguiente

$$\left[m\frac{P}{Q}+b\right]=\left[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}\right]$$

para cada valor entero de m, y ello significa que la serie $\left(\frac{P}{Q},\ b\right)$ cualquiera que sea b es idéntica con alguna serie $\left(\frac{P}{Q},\frac{\rho}{Q}\right)$ donde el entero ρ está convenientemente elegido.

4º. Sea

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{Q-1}$$

el período de la serie de Bernoulli $\left(\frac{P}{Q},0\right)$ que debe considerarse como más sencilla. Una vez conocido este período el período de cada serie $\left(\frac{P}{Q},\frac{\rho}{Q}\right)$ se hallará casi inmediatamente. En efecto, sea ν el número no negativo y menor de Q únicamente determinado por la congruencia

$$P\nu \equiv \rho \pmod{Q}.$$

Entonces

$$m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}=(m+\nu)\frac{P}{Q}+h$$

con h cierto entero fijo y por consiguiente

$$\left[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}\right]=\left[(m+\nu)\frac{P}{Q}\right]+h,$$

de donde resulta

$$K_m = c_{m+\nu}$$

y ello quiere decir que el período de la serie $\left(\frac{P}{Q}, \frac{\rho}{Q}\right)$ será

$$c_\nu,\ c_{\nu+1}, \ldots\ c_{Q-1},\ c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{\nu-1}$$

y se obtiene del período

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{\nu-1},\ c_\nu,\ \ldots,\ c_{Q-1}$$

trasponiendo ν primeros términos a la derecha sin alterar su orden.

5º. El período

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{Q-1}$$

de la serie $\left(\frac{P}{Q}, 0\right)$ se empieza en 0 y se acaba en 1 y la parte

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{Q-2},$$

que existe sólo cuando $Q>2$, es simétrica, es decir

$$c_{Q-1-\rho} = c_\rho$$

para $\rho=1,\ 2,\ \ldots,\ Q-2$. En efecto, tenemos primero

$$c_0 = \left[\frac{P}{Q}\right] = 0 \text{ por ser } 0 < \frac{P}{Q} < 1$$

$$c_{Q-1} = \left[\frac{Q \cdot}{Q} P\right] - \left[(Q-1)\frac{P}{Q}\right] = P-(P-1) = 1.$$

Luego

$$\left[(Q-\rho)\frac{P}{Q}\right]=P-\left[\rho\frac{P}{Q}\right]-1.$$

$$\left[(Q-1-\rho)\frac{P}{Q}\right]=P-\left[(\rho+1)\frac{P}{Q}\right]-1$$

por no ser ninguno de los dos números

$$\rho\frac{P}{Q},\ (\rho+1)\ \frac{P}{Q}$$

entero, de donde

$$c_{Q-1-\rho}=\left[(Q-\rho)\frac{P}{Q}\right]-\left[(Q-1-\rho)\frac{P}{Q}\right]=$$

$$=\left[(\rho+1)\frac{P}{Q}\right]-\left[\rho\frac{P}{Q}\right]=c_\rho$$

lo que queríamos demostrar.

4. — Para investigar la estructura del período de la serie $\left(\frac{P}{Q}, 0\right)$ empecemos con el caso más sencillo $P=1$, $Q=s$. Entonces

$$\left[\frac{m}{s}\right]=0$$

para $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1$, pero $\left[\frac{s}{s}\right]=1$ y por tanto el período buscado será

$$0^{s-1}\,1$$

Sea luego $P>1$; siendo s la parte entera del cociente $\frac{Q}{P}$ podemos escribir

$$\frac{P}{Q}=x=\frac{1}{s+x'}$$

donde $0<x'<1$. El número racional x' tendrá P por denominador como se ve fácilmente y el período de la serie $(x',0)$:

$$c'_0,\ c'_1,\ \ldots,\ c'_{P-1}$$

constará de P términos. Vamos a ver cómo, conociendo este período, se halla el de la serie $(x,0)$. Al variar m de 0 a $Q-1$ la parte entera de

$$m\,\frac{P}{Q}$$

toma valores 0, 1, 2, ..., $P-1$. Sea h uno de estos números y m_h el máximo entero tal que todavía tenemos

$$\left[m_h\,\frac{P}{Q}\right]=h.$$

Conociendo la sucesión

$$m_0,\ m_1,\ \ldots,\ m_{P-1}$$

conoceremos inmediatamente el período de la serie $(x,0)$ el cual será

$$0^{m_0}\,1\,0^{m_1-m_0-1}\,1\,0^{m_2-m_1-1}\,1\ \ldots\ 0^{m_{P-1}-m_{P-2}-1}\,1.$$

De la definición de m_h sigue

$$m_h\,x<h+1,\quad (m_h+1)\,x\geqq h+1$$

de donde

$$m_h<\frac{h+1}{x}=(h+1)\,s+(h+1)\,x'$$

$$m_h\geqq\frac{h+1}{x}-1=(h+1)\,s+(h+1)\,x'-1.$$

El producto $(h+1)\,x'$ no es entero para $h=0, 1, 2, \ldots, P-2$ y entonces

$$m_h=(h+1)\,s+[(h+1)\,x']$$

de modo que

$$m_h-m_{h-1}-1=s-1+[(h+1)\,x']-[hx']$$

o bien

$$m_h-m_{h-1}-1=s-1+c'_h$$

en tanto que $h=1, 2, \ldots, P-2$. Al contrario para $h=P-1$ tenemos

$$m_{P-1}=Ps+[Px']-1$$

siendo Px' entero y

$$m_{P-1}-m_{P-2}-1=s-2+[Px']-[(P-1)\,x']=s-1.$$

Además

$$m_0=s+[x']=s$$

y por lo tanto el período buscado de la serie $(x, 0)$ será

$$0^s\,1\,0^{s-1+c'_1}\,1\,0^{s-1+c'_2}\,1\ldots0^{s-1+c'_{P-2}}\,1\,0^{s-1}\,1$$

o bien

$$0^s\,1\,0^{s-1+c'_{P-2}}\,1\,0^{s-1+c'_{P-3}}\,1\ldots0^{s-1+c'_1}\,1\,0^{s-1}\,1$$

teniendo en cuenta la simetría del grupo

$$c'_1,\ c'_2,\ \ldots,\ c'_{P-2}.$$

Presentado el período buscado en segunda forma resulta, como se ve fácilmente, del período de la serie $(x', 0)$ según la regla siguiente:

Siguiendo los términos del período

$$c'_0,\ c'_1,\ \ldots,\ c'_{P-1}$$

de derecha a izquierda se sustituye $0^s 1$ para cada unidad y $0^{s-1} 1$ para cada cero y se escriben dichos grupos de izquierda a derecha.

Sentado esto sea

$$x = \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{s_1 + \dots + \cfrac{1}{s_n}}}$$

el desarrollo del número x en una fracción continua. Saliendo del período correspondiente a $\frac{1}{s_n}$ que es

$$0^{s_n - 1} 1$$

según la regla hallamos el período correspondiente a

$$\cfrac{1}{s_{n-1} + \cfrac{1}{s_n}}.$$

Más adelante, con ayuda de la misma regla encontraremos el período correspondiente a

$$\cfrac{1}{s_{n-2} + \cfrac{1}{s_{n-1} + \cfrac{1}{s_n}}}$$

y así sucesivamente hasta que llegamos al período buscado.

5. — Consideremos ahora algunos ejemplos numéricos

Ejemplo 1. Encontrar el período de la serie $\left(\frac{37}{50}, 0\right)$ Tenemos

$$\frac{37}{50} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

y haciendo uso de la regla se encuentra sucesivamente

Período	correspondiente a
$0\,1$	$\frac{1}{2}$
$0^5\,1\,0^4\,1$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$
$0\,1^5\,0\,1^6$	$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$
$(0^2\,1)^6\,0\,1\,(0^2\,1)^5\,0\,1$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$
$0\,1^2\,(0\,1^3)^5\,0\,1^2\,(0\,1^3)^6$	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$

de modo que

$$0\,1^2\,(0\,1^3)^5\,0\,1^2\,(0\,1^3)^6$$

es el período buscado.

Ejemplo 2. Deseamos construir la tabla de enteros próximos a los múltiplos del número $\frac{13}{17}$. Busquemos en primer lugar el período de la serie $\left(\frac{13}{17}, 0\right)$. Tenemos

$$\frac{13}{17}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

y hallamos sucesivamente

$$0^3\,1$$
$$0^3\,1\,(0^2\,1)^3$$
$$(0\,1^3)^3\,0\,1^4$$

lo que es el período deseado. Ahora debemos buscar el período de la serie $\left(\frac{13}{17}, \frac{1}{2}\right)$. Tenemos

$$\rho = \left[\frac{17}{2}\right] = 8$$

$$13\,\nu \equiv 8 \pmod{17}$$

donde

$$\nu \equiv \frac{8}{13} \equiv \frac{-8}{4} \equiv -2 \equiv 15 \pmod{17}.$$

Separando en

$$(0\,1^3)^3\,0\,1^4$$

15 primeros términos $(0\,1^3)^3\,0\,1^2$ y escribiéndolos detrás de dos términos 1^2 que quedan logramos por fin el período deseado

$$1^2\,(0\,1^3)^3\,0\,1^2$$

y la tabla de enteros próximos se construye empleando sólo adiciones como se ve:

$$\begin{array}{l} m = 0\;1\;2\;3\;4\;5\;6\;7\;8\;9\;10\;11\;12\;13\;14\;15\;16\;17 \\ \hline \qquad\quad 1\;1\;0\;1\;1\;1\;0\;1\;1\;1\;\;0\;\;1\;\;1\;\;1\;\;0\;\;1\;\;1 \end{array}$$

$$\left\{\frac{13}{17}m\right\} = 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 13.$$

6. — La solución expuesta del problema de Bernoulli es bastante sencilla y cómoda si deseamos hallar el período completo. Pero, aunque sea x racional, puede ser que necesitamos mucho menos términos de lo que contiene este período. En tal caso y aún en caso de x irracional el problema debe plantearse de otro modo. En aplicaciones prácticas el número de términos que es preciso encontrar es siempre dado de antemano, sea N.

Entonces necesitamos buscar medios más expeditos para hallar N términos

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{N-1}$$

de la propuesta serie de Bernoulli (x, b). Con tal propósito introducimos el concepto del período mínimo de la dada sección

$$K_\lambda,\ K_{\lambda+1},\ \ldots,\ K_\nu$$

de la serie de Bernoulli. Llamamos el período mínimo a la más corta parte de ella

$$K_\lambda,\ K_{\lambda+1},\ \ldots,\ K_\mu$$

que, repetida periódicamente, cubre todos los términos K_λ, $K_{\lambda+1}$, ..., K_ν.

Una vez que tengamos reglas para hallar el período mínimo de la sección

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_{N-1}$$

el problema planteado estará resuelto. En el estudio de propiedades del período mínimo podemos limitarnos al caso de x racional. En efecto, sea x irracional, b un número real cualquiera y

$$mx+b=[mx+b]+\vartheta_m$$

donde $0 \leqq \vartheta_m < 1$. Sea ω el máximo de los números ϑ_0, ϑ_1, ..., ϑ_N y $\dfrac{P}{Q}$ una convergente (*) del orden par a la fracción continua

$$x=\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{s_1+\cfrac{1}{s_2+\ldots}}}$$

de modo que

$$\frac{P}{Q}=x+\frac{\epsilon}{Q^2},\quad 0<\epsilon<1.$$

(*) El autor llama convergente principal y convergente intermedia a la reducida principal y reducida intercalada, respectivamente.

Entonces

$$m\frac{P}{Q}+b=[mx+b]+\vartheta_m+\frac{m\epsilon}{Q^2}$$

Pero

$$\vartheta_m+\frac{m\epsilon}{Q^2}\leqq\omega+\frac{m\epsilon}{Q^2}$$

y eligiendo Q bastante largo para que sea

$$\omega+\frac{N\epsilon}{Q^2}<1$$

tendremos

$$[m\frac{P}{Q}+b]=[mx+b]$$

para $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N$ de modo que N términos de ambas series (x, b) y $\left(\frac{P}{Q}, b\right)$ son idénticos. La última serie será idéntica con la serie $\left(\frac{P}{Q}, \frac{\rho}{Q}\right)$ donde ρ está convenientemente elegido o con la serie

$$\left(\frac{P}{Q}, \frac{2\rho+1}{2Q}\right)$$

por ser

$$\left[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}\right]=\left[m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}+\frac{1}{2Q}\right]$$

para cada valor de m. Por razones teóricas conviene considerar la serie $\left(\frac{P}{Q}, \frac{2\rho+1}{2Q}\right)$ en vez de $\left(\frac{P}{Q}, \frac{\rho}{Q}\right)$ porque nunca

$$m\frac{P}{Q}+\frac{\rho}{Q}+\frac{1}{2Q}$$

es un número entero.

SOBRE LOS GRUPOS DE AUTOMORFISMOS

por

GARRETT BIRKHOFF

Es bien conocido que *los automorfismos de cada álgebra abstracta forman un grupo*. Nuestro objeto es demostrar tres recíprocas de esta proposición.

Recordamos el teorema de Cayley, que dice que cada grupo G es isomorfo al grupo de sus traslaciones *a la derecha*

$$(1) \qquad T_a:\ x \longrightarrow x T_a = xa.$$

Recordamos también que las traslaciones a la derecha de G son las transformaciones permutables [1] con las traslaciones a la izquierda $x \longrightarrow bx$ de G. Es decir, que son los *automorfismos* del álgebra abstracta G, cuyos *elementos* son los elementos de G, y cuyas operaciones son las operaciones unitarias

$$(2) \qquad U_b:\ x \longrightarrow bx.$$

Porque decir que ϑ es homomórfico con respecto a U_b, es decir que $\vartheta(x U_b) = \vartheta(x) U_b$, que es decir que ϑ y U_b son permutables. Obtenemos de esta manera casi trivial, el teorema siguiente:

Teorema 1. - *Cada grupo abstracto G con α elementos es isomorfo con el grupo de todos los automorfismos de un álgebra abstracta G de α elementos y α operaciones unitarias.*

Entonces construiremos de G un sistema parcialmente ordenado X con $\alpha^2 + \alpha$ elementos, y con un grupo de automorfismos isomorfo a G. Los elementos de X son los $g \varepsilon G$ y los pares (g, g_τ) con $g \varepsilon G$, $g_\tau \varepsilon G$. Para *ordenar* X, supondremos que los elementos de G son «bien ordenados»:

---

(1) Cr. por ejemplo Miller, Blichfeldt y Dickson, "*Theory and Applications of Finite Groups*". Para los conceptos de álgebra abstracta, sistema parcialmente ordenado, y "red" cr. el "*Lattice Theory*" del autor, pp. 2, 5, 16.

$$G = \{ e = g_1, g_2, g_3, \ldots, g_\omega, g_{\omega+1}, \ldots \}$$

y escribiremos, para cada $g \varepsilon G$,

$$(3) \qquad g > (g, g_1) > (g, g_2) > \ldots > (g, g_\omega) > (g, g_{\omega+1}) > \ldots$$

Así subdividimos X en α cadenas maximales sin elementos comunes. Escribiremos también

$$(4) \qquad g > (g_\tau g, g_\tau) > (g_\tau g, g_{\tau+1}) > (g_\tau g, g_{\tau+2}) > \ldots$$

de manera que $(g, g_1) \not> (h, g_2)$ si $g \neq h$. Es fácil ver que X es un sistema parcialmente ordenado con respecto a (3) y (4).

Es fácil ver también que las transformaciones

$$(5) \qquad \alpha_a \colon g \longrightarrow ga, \ (g, g_\tau) \longrightarrow (ga, g_\tau)$$

y sus inversas $\alpha_a - 1$ conservan (3) y (4). De donde se sigue que el grupo A de los α_a, que es isomorfo con G, es un subgrupo del grupo de todos los automorfismos de G. Recíprocamente, sea α algún automorfismo de X, y sea $a = \alpha(e)$. Es fácil demostrar que α permuta las cadenas maximales (3). En efecto, permuta los elementos g maximales; ya que (g, g_1) es el único elemento $x < g$ y no menor que ningún otro elemento, $\alpha(g, g_1) = (\alpha(g), g_1)$; en general, puesto que $(g, g_{\tau+1}$ es el elemento $x < (g, g_\tau)$ más grande, se demuestra por inducción transfinita que $\alpha(g, g_\tau) = (\alpha(g), g_\tau)$. Falta por demostrar que $\alpha(g) = ga$. Pero (e, g_τ^{-1}) es por (4) el elemento más grande de la cadena (e, g_σ) contenido en (e, g_τ); sigue que $(\alpha(e)\, g_\tau^{-1}) = (a, g_\tau^{-1})$ es el elemento más grande de la cadena (a, g_σ) contenido en $(\alpha(e, g_\tau)$, y por (4) queda $a = g_\tau^{-1}\,\alpha(g)$ o $\alpha(g_\tau) = g_\tau a$. Así se completa la demostración, y podemos afirmar el teorema siguiente:

Teorema 2.- *Cada grupo abstracto G con α elementos es isomorfo con el grupo de todos los automorfismos de un sistema parcialmente ordenado X de $\alpha^2 + \alpha$ elementos.*

Esta construcción tiene la ventaja de que X no posee más que una relación y ninguna operación. Sin embargo X no es «álgebra abstracta» en el sentido usual [1], y la demostración usa el Axioma de Selección. Vamos a ver cómo podemos eliminar la primera desventaja.

Teorema 3. - *Cada grupo abstracto G con α elementos es isomorfo con el grupo de todos los automorfismos de una red distributiva («distributive lattice») B^X con a lo más $2^{\alpha^2+\alpha}$ elementos.*

Demostración. Sea B^X el conjunto de todas las funciones unívocas con dominio X y valores 0 o 1, tales que $x \leqq x'$ en X implica $f(x) \leqq f(x')$ (es decir, funciones no decrecientes). Es fácil ver que si definimos

$$(6) \qquad f \leqq g \text{ significa } f(x) \leqq g(x) \text{ para toda } x,$$

este B^X llega a ser una red distributiva [2]. Ya que la definición de B^X es abstracta, es evidente que cada automorfismo α: $x \to x\alpha$ de X induce un automorfismo $f(x) \to f(x\alpha)$ sobre B^X. A causa del Teorema 2, el Teorema 3 estará demostrado si podemos demostrar que B^X no tiene ningún otro automorfismo.

Consideremos la clase $X^* \leqq B^X$ de todas las funciones

$$(7) \qquad f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqq a \\ 0 & \text{si no } x \geqq a. \end{cases}$$

Son las únicas funciones tales que la unión g de todas las $f < f_a$ de B^X satisface $g < f_a$ (en efecto, $g(x) = 1$ si $x > a$, $g(x) = 0$ si $x \not> a$). Se sigue de aquí que cada automorfismo α de B^X permuta los elementos de X isomórficamente — es decir, ya que X^* es dualmente isomórfico con X, como un automorfismo $\bar{\alpha}$ de B^X inducido por un automorfismo de X. Además, cada $f \varepsilon B^X$ puede ser representado únicamente como una unión

$$(8) \qquad f = \vee f_a \text{ para las } a \text{ tales que } f(a) = 1,$$

de elementos de X^*. De aquí se sigue que α permuta los $f \varepsilon B^X$ de la misma manera que $\bar{\alpha}$, lo que completa la demostración.

Sería interesante demostrar los Teoremas 2 - 3 sin usar el Axioma de Selección, y también de reducir las constantes α, $\alpha^2 + \bar{\alpha}$, y $2^{\alpha^2+\alpha}$ en los Teoremas 1, 2, 3 respectivamente

HARVARD UNIVERSITY

(2) Cr. "*An extended Arithmetic*", por G. Birkhoff, Duke Jour. Math. 3 (1937), 311-16.

JOSÉ WÜRSCHMIDT

Nos es grato presentar nuestras felicitaciones al Profesor José Würschmidt con motivo del 60° aniversario de su nacimiento, que se cumple el 5 de febrero de 1946, y aprovechar tal oportunidad para recordar la importante obra realizada por él, durante una actividad de más de 20 años en este país.

El Dr. Würschmidt nació en 1886, en Bayreuth (Alemania). Estudió Física y Matemática en Erlangen, bajo la dirección de E. Wiedemann. Se doctoró en la Universidad de Erlangen en 1909, con una tesis sobre «descargas discontinuas y la así llamada capacidad de tubos de descarga».

La actividad científica del Dr. Würschmidt se refleja en unas cien publicaciones, en alemán y en castellano, sobre varios problemas experimentales, teóricos, históricos y didácticos: tubos de descarga, volúmen de las aleaciones, pruebas por métodos magnéticos, teoría del factor de demagnetización, propagación de la luz según la teoría de la relatividad, problemas de acústica, etc., etc. Le permitió hacer una carrera académica brillante: 1911 «Privatdozent» (Erlangen), 1916 Profesor Extraordinario (Erlangen), 1919 Profesor de la «Handelshochschule» (Nuremberg), 1924 Profesor Extraordinario (Colonia). Durante la primera guerra mundial dirigió una sección del Instituto Central Climatológico en Estambul y, en 1921, fué jefe de sección en el Departamento de Investigaciones de Krupp, Essen.

Vino en 1925 a Tucumán, llamado por R. Gans, entonces director del Instituto de Física de La Plata. Hizo una obra que los norteamericanos llaman «pioneering». Es debido a él, que la Universidad de Tucumán alcanzó en el dominio de la física, un nivel más elevado que las otras universidades del interior del país. Apreció correctamente la situación y, sus publicaciones se dedicaron, después de su llegada al país, especialmente a las necesidades de la enseñanza. Desde un punto de vista personal fué, seguramente, un sacrificio, restringir, aunque temporariamente, la serie de sus investigaciones científicas. El provecho lo tiene la Universidad de Tucumán y la enseñanza secundaria del norte del país. Lo que significa tal trabajo, probablemente todavía no es suficientemente apreciado en este país. El curso de Física Experimental, 1ª y 2ª parte, publicado en Tucumán, pertenece a lo mejor que tiene, en este dominio, la literatura en idioma castellano. Sería sumamente deseable que estos libros encuentren en el futuro, mucho más atención por parte de los estudiantes de física y por parte de los docentes universitarios. Además, el Dr. Würschmidt publicó tres fascículos interesantes de apuntes de física teórica. Con ello y los trabajos de laboratorio se tiene todo el equipo básico necesario para la enseñanza de la física para ingenieros y profesores de enseñanza secundaria.

Una vez alcanzado este nivel, el Dr. Würschmidt se dedicó más a la investigación. Un número de conferencias informó sobre resultados importantes de los últimos años. Junto con F. Cernuschi empezó a organizar la enseñanza superior. De sus últimos trabajos queremos mencionar, en particular, uno (Aberración, efecto Doppler y presión de luz) que continúa trabajos anteriores del autor y permite aplicaciones importantes a problemas nuevos (efecto de Cherenkov, termodinámica relativista).

El Dr. Würschmidt ya tiene en Tucumán estudiantes que quieren seguir la carrera del doctorado y desean dedicarse a trabajos de investigación en física. Podemos esperar ver al Dr. Würschmidt organizar, dentro de pocos años, la carrera del doctorado en física en Tucumán.

La última etapa, la organización de la investigación junto con la enseñanza, es, en este país, una experiencia nueva. La investigación moderna necesita una base más amplia que la de una sola universidad. Coordinar las fuerzas vivas disponibles es una tarea difícil y no está libre de peligro. Confiamos en la personalidad y en la experiencia del Dr. Würschmidt para alcanzar el último fin.

Enrique Gaviola - Guido Beck

CRONICA

SEGUNDAS JORNADAS MATEMATICAS ARGENTINAS

(Congreso de Matemática, Física y Astronomía)

Después de vencer diversas dificultades de organización, se realizaron, del 17 al 23 de septiembre de 1945, en Buenos Aires y Rosario, las *Segundas Jornadas Matemáticas Argentinas* que, conjuntamente inauguradas con la *Sexta Reunión* de la *Asociación Física Argentina*, han constituído un primer *Congreso de Matemática, Física y Astronomía.*

La *Unión Matemática Argentina*, organizadora de estas *Jornadas Matemáticas*, patrocinó al mismo tiempo dos *Coloquios*, uno sobre *Enseñanza de las Matemáticas Elementales*, dirigido por el Dr. A. Durañona y Vedia, y otro, conjuntamente con la *Institución Cutural Española*, sobre *Historia y Filosofía de las Ciencias*, dirigido por el Dr. J. Rey Pastor.

Las representaciones nacionales y extranjeras estuvieron constituídas por los siguientes delegados:

—Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad del Paraguay, Dr. Sergio Sispánov.

—Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Quito, Ecuador, Dr. Peter Thullen.

—Facultad de Ingeniería de la Universidad del Uruguay, Ing. Julio Vales, Ing. José L. Massera, Ing. Celestino Galli, y bachiller Antonio Petracca, estos dos últimos, juntamente con el Ing. Mario Coppetti, también delegados de *Enseñanza Secundaria* de dicha Facultad.

—Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Tucumán, Dr. Alejandro

Terracini, Dr. José Würschmidt (también delegado al *Coloquio de Historia y Filosofía de las ciencias*) y Dr. Desiderio Papp (delegado al *Coloquio de Historia y Filosofía de las Ciencias*).

—Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de la Universidad de La Plata, Dr. Alberto E. Sagastume y Dr. Rafael Grinfeld.

—Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Cuyo, Dr. Horacio J. A. Rimoldi.

—Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Córdoba, Ing. Juan Jagsich, Ing. Mario Ninci, Ing. Fernando Esteban e Ing. Pedro Luis Checchi.

—Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad del Litoral, Dr. Beppo Leví, Dr. Luis A. Santaló, Agrimensor Eduardo Gaspar e Ing. Pedro E. Zadunaiski.

—Colegio Nacional "Manuel Belgrano" de Buenos Aires, Prof. Pedro Isidro Pauletto (delegado al *Coloquio de Matemáticas Elementales*).

—Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, Dr. Enrique Días de Quijarro, Dr. Martiniano Leguizamón Pondal e Ing. Antonio Lascurain.

El Dr. Peter Thullen no pudo estar presente a causa de no haber podido realizar el el viaje en avión a último momento. Nos hizo llegar, sin embargo, el título de su trabajo (*"Generalidades sobre la teoría de las funciones analíticas de dos o más variables complejas"*).

Un grupo de profesores de San Luis envió el siguiente telegrama: "Imposibilitados de asistir por obligaciones docentes, hacemos llegar nuestra adhesión y los mejores deseos de éxito a ese Congreso. Manuel Balanzat, Carlos Carletti, Manuela Cuello, Pascual Colavita, Fermín Crespo, Obdulio Ferrari, Modesto González, Felisa Vitale de Lucero, Fermín Míguez Iñarra, Pedro Pasinetti, María Tula".

Las *Jornadas* desarrolláronse en la siguiente forma:

El lunes 17, a las 18, se llevó a cabo, en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, el acto de inauguración, conjuntamente con la *Asociación Física Argentina*. Habló el Sr. Decano de la Facultad, Ing. Pedro Mendiondo, quien destacó la importancia del acontecimiento que reunía a físicos, matemáticos y astrónomos llevados por un mismo anhelo de superación científica. A continuación, el Dr. Teófilo Isnardi, en representación de la *Asociación Física Argentina*, dió una conferencia sobre *Las investigaciones físicas en nuestro país*; y el Dr. Alberto González Domínguez, en nombre de la *Unión Matemática Argentina*, se ocupó de *Los estudios matemáticos en el país*. El Dr. Isnardi hizo hincapié en la orientación científica de las Universidades y en la contracción al estudio de los hombres dedicados a la ciencia. El Dr. González Domínguez esbozó la evolución del cultivo de la matemática en la Argentina y subrayó la importante actuación del doctor Claro C. Dassen, así como la influencia fundamental ejercida por el Dr. Julio Rey Pastor desde hace un cuarto de siglo. El movimiento ascendente y extensivo se acentúa con la incorporación reciente al país del Dr. Beppo Levi.

Terminadas las exposiciones, se pasó al despacho del Señor Decano, donde se sirvió un vino de honor que dió ocasión, en amabilísimo ambiente, a que se cambiasen ideas y se estrechasen vínculos de amistad entre caballeros y damas venidos de distintos lugares.

El martes 18, a las 18 y en la misma Facultad, como todas las siguientes sesiones, se inició la reunión tratando una moción del Dr. Fausto Toranzos en el sentido de dar una declaración de carácter democrático, teniendo en cuenta el estado político en que se encuentra la República. Después de una discusión que insumió algo más de una hora, durante la cual hablaron diferentes personas, no sin llegarse hasta la exaltación de algunos espíritus, se acordó formular y publicar la siguiente declaración: ''Las segundas Jornadas Matemáticas Argentinas suspenden sus actividades durante la tarde del día 19 de septiembre de 1945 en adhesión a la Marcha de la Constitución y de la Libertad y disponen hacer pública esta declaración''. Por su parte, la *Asociación Física Argentina* adoptó una determinación semejante.

Se pasó enseguida a las comunicaciones científicas. El Dr. Alejandro Terracini, de Tucumán, se ocupó de *''La geometría proyectiva diferencial y las ecuaciones lineales en derivadas parciales''*. El Dr. Sergio Sispánov, de Asunción (Paraguay), se ocupó de *''Curvas de Darboux sobre superficies de rotación''*.

A la noche hubo una cena de camaradería en el Club Universitario, que congregó a astrónomos, físicos, matemáticos y distinguidas damas. Hablaron entusiastamente el Dr. J. Costa Ribeiro, de Río de Janeiro, el Dr. Enrique Gaviola, de Córdoba, y el Dr. Agustín Durañona y Vedia, de Buenos Aires.

El Jueves 20, a las 15, el Dr. Horacio J. A. Rimoldi, de Mendoza, expuso un trabajo sobre *''Aplicación del cálculo de matrices a la psicología''*, que motimó un interesante cambio de ideas con algunos de los asistentes, el Dr. Alexander Wilkens, de La Plata, se ocupó de *''El fenómeno de la libración de los asteroides del sistema solar y su estabilidad''*, dejando planteadas algunas sugestiones puramente matemáticas; y el Dr. Alberto González Domínguez, de Buenos Aires, habló sobre *''La Matemática y la Técnica Moderna''*, destacando cómo los problemas técnicos promueven profundas invetsigaciones matemáticas.

Este mismo día tuvo lugar, a las 17, el *Coloquio de Matemáticas Elementales,* presidido por el Dr. Agustín Durañona y Vedia. En primer término, el Dr. Beppo Levi dió una hermosa y sólida conferencia titulada *''Pensamientos y recuerdos de un hombre de la escuela media''*. Exponiendo en su característica manera, evocando días lejanos de iniciación y experiencia como profesor en Italia, el Dr. Levi dijo cosas de gran valor didáctico. Se abrió luego una animada discusión sobre *la enseñanza de las matemáticas elementales* en la que participaron el Dr. B. Levi, el Dr. F. Toranzos, el Dr. Durañona y Vedia y algunos de los numerosos profesores de colegios y escuelas que habían concurrido a la reunión.

El viernes 21 continuaron las Jornadas en Rosario, en la Facultad de Ciencias Matemáticas, formando parte de los actos preparados para celebrar el 25º aniversario de su fundación.

Contándose, por una parte, con quince pasajes y alojamientos pagados por la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario y, por otra parte, con una rebaja de pasajes obtenidos en el Ferrocarril Central Argentino por el Dr.

Manuel Sadosky, viajaron de Buenos Aires a Rosario el Dr. Sergio Sispánov, el Prof. Mischa Cotlar, el Sr. Gregorio Klimovsky, el Dr. Máximo Valentinuzzi, el Sr. Juan C. Grimberg, el Sr. Emilio O. Roxin, el Ing. Mario Coppetti, el Sr. Adolfo Ricabarra, el Dr. Emilio A. Machado, el Dr. Héctor A. Pérsico, la Lic. Estrella Mazzolli de Mathov, la Lic. Cecilia Mossin Kottin de Lapzeson, el Dr. Guido Beck, la Sra. Pastora Nogués Acuña, el Dr. Alejandro Terracini, el Lic. Félix E. Herrera, el Dr. Ricardo Platzeck, la Dra. Celina Repetto, la Prof. Juana María Cardoso, el Dr. Agustín Durañona y Vedia y señora, el Dr. Manuel Sadosky, el Sr. Abraham Eidlicz, el Dr. Beppo Levi y señora, la Dra. Laura Levi, el Sr. Rolando García, la Prof. Fanny Aisenberg, el Dr. Fausto Toranzos, el Ing. José P. Lombardi, el Ing. Luis A. Bonet, el Prof. Salomón Selzer y señora, el Dr. Alberto E. Sagastume Berra y señora, el Dr. Pi Calleja, el Prof. Antonio Valeiras e hija y el Sr. J. Cohen.

Después de un viaje en que menudearon los más variados temas de conversación, presididos por el buen humor, la comitiva fué recibida en Rosario por varios profesores de la Facultad.

A las 15 un grupo de visitantes recorrió la ciudad, bajo una lluvia torrencial, en el ómnibus de la Facultad.

A las 17 fueron recibidos en su despacho por el Sr. Decano, Ing. Cortés Plá. De inmediato se pasó al salón de actos, donde aquel abrió la sesión con un cálido discurso. A continuación, el Dr. Sergio Sispánov relató el trabajo del Dr. Nicolás Krivoshein, de Asunción, sobre *''Condiciones de aplicabilidad de las ecuaciones de Daniel Bernoulli''* y expuso el suyo propio *''Teoría exacta de los puentes colgantes''*. El Prof. Mischa Cotlar, de Buenos Aires, dió un *''Panorama de las principales teorías de la integral''*, el Prof. S. Selzer, de Buenos Aires, se ocupó de *''La integración en los espacios abstractos''* y el Dr. Alberto E. Sagastume Berra, de La Plata, habló de *''El Algebra Moderna''*. A propuesta del Dr. A. Durañona y Vedia se acordó enviar un telegrama al Dr. J. Rey Pastor lamentando su ausencia en Rosario. Se anunció que el Dr. Juan C. Vignaux, no pudiendo viajar a Rosario, había remitido un telegrama disculpando su inasistencia.

El sábado 22, a las 10, el Dr. Beppo Levi, de Rosario, se ocupó de *''Teorías y problemas sobre geometría algebráica''*, el Dr. Luis A. Santaló, de Rosario, hizo una *''Exposición de algunos resultados en geometría algebraica''*, y el Dr. A. Durañona y Vedia, de Buenos Aires, habló sobre *''La Topología Moderna''*.

Terminada la reunión, el Sr. Decano, Ing. Cortés Plá, y los señores profesores, agasajaron a los congresales con un animado almuerzo criollo en uno de los talleres de la Facultad.

A lah 15, un grupo de congresales fué llevado en el ómnibus de la Facultad a San Lorenzo. Recibidos en el famoso Convento por el Padre Teófilo Luque, éste les brindó amplias explicaciones sobre el histórico combate desde la terraza del edificio, les mostró la vieja capilla, hoy substraída a los oficios religiosos públicos, y la antigua biblioteca, que posee una monumental ''Patrología'' para consulta de los seminaristas que allí estudian. Al despedirlos, se interesó por las actividades de las Jornadas y les solicitó el envío de algunas publicaciones de matemáticas.

A las 17, de nuevo en Rosario, la *Unión Matemática Argentina*, aprovechándose la presencia de todos los miembros de la nueva Junta Directiva, realizó una sesión presidida por el Dr. A. Terracini, para tratar diversos asuntos.

A las 18 se asistió, en la Facultad de Ciencias Matemáticas, al acto alusivo al 25º aniversario de su fundación, consistente en el descubrimiento de placas de bronce ofrecidas por los egresados y el Centro de Estudiantes. El Sr. Decano, Ing. Cortés Plá, pronunció un vibrante discurso pleno de fé republicana. También hablaron el Ing. Arturo Rocca y el Sr. Enrique F. Spangenberg.

A las 19, contándose con la presencia de numeroso público, se realizó la última sesión. La Lic. Cecilia Mossin Kottin de Lapzeson pronunció una erudita conferencia sobre "*La desintegración del átomo*". De inmediato ocupó la tribuna el Dr. Guido Beck quien, con frases concisas y vehementes, instó a la labor científica tesonera. Se dió luego lectura a la lista de las delegaciones y a algunos informes de secretaría relacionados con el desarrollo del Congreso y las innovaciones que hubo que introducir en los programas. Finalmente el Dr. Alejandro Terracini cerró las Jornadas con un conceptuoso discurso.

El día 23 se regresó a Buenos Aires.

En los diarios "La Capital", de Rosario, y en "Crítica", "La Prensa", etc., de Buenos Aires, así como en la revista "*Ciencia e Investigación*" (número de noviembre) hay noticias y crónicas de los diversos actos de este importante certamen científico.

M. VALENTINUZZI

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

VOLUMEN I (1936-1937), VOLUMEN II (1938-1939)

Notas y memorias de J. BABINI, C. BIGGERI, C. A. BULA, F. CERNUSCHI, J. A. DEL PERAL, J. FAYET, Y. FRENKEL, F. L. GASPAR, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, T. LEVI-CIVITA, M. PETROVICH, J. REY PASTOR, S. RIOS, F. TORANZOS.

Bibliografía, Extractos, Crónica, Revista de revistas, etc.

VOL. III (1938-1939). VOL. IV (1939). VOL. V (1940). VOL. VI (1940-1942)

Fascículos separados

Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*

» 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*

» 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.*

» 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*

» 5. — NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*

» 6. — RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*

» 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.

» 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*

» 9. — CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*

» 10. — COTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*

» 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*

» 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*

» 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*

» 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*

» 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*

» 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*

» 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por* n *rectas arbitrarias.*

» 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*

» 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*

» 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*

» 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*

» 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*

» 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*

» 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*

» 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

VOL. VII (1940-1941). VOL. VIII (1942). VOL. IX (1943). VOL. X (1944-1945)

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, J. BARRAL SOUTO, G. BECK, M. BUNGE, H. E. CALCAGNO, E. A. DE CESARE, E. FERRARI, V. y A. FRAILE y C. CRESPO, Y. FRENKEL, R. FRUCHT, E. GASPAR, F. L. GASPAR, A. J. GUARNIERI, J. E. HERRERA, G. KNIE, N. KRIVOSHEIN, W. MÄCHLER, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, S. RIOS, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, S. SISPÁNOV, A. TERRACINI.

Informes de las reuniones de la Asociación Física Argentina.

Soluciones de temas propuestos, Bibliografía, Crónica, etc.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.*

Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.*

Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.*

Nº 4. — JULIO REY PASTOR. *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones.* Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática.*

SUMARIO