

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

ORGANO DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

REDACTADA por

J. Babini (Director), J. Rey Pastor, L. A. Santaló y E. Gaviola (Delegado de la A. F. A.)



MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. BABINI (Santa Fe) (fundador). — M. BALANZAT (San Luis). — J. BARRAL SOUTO (B. Aires) (fundador). — C. A. BULA (Rosario) (fundador). — E. CO-ROMINAS (Mendoza). — E. CHICHIZOLA (Rosario). — C. DIEULEFAIT (Rosario) (fundador). — A. DURAZONA y VEDIA (B. Aires). — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FÍSICAS Y NATURALES (B. Aires) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario) (fundador). FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe) (fundador). — Y. FRENKEL (B. Aires). — E. GASPAR (Rosario) (fundador). — F. L. GASPAR (Rosario) (fundador). — J. GIANNONE (Rosario) (fundador). — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires) (fundador). — J. GONZÁLEZ GALE (Buenos Aires) (fundador). — M. GUITARTE (Buenos Aires) (fundador). — W. S. HILL (Montevideo) (fundador). — C. ISELLA (Rosario) (fundador). — H. MAGLIANO (La Plata). — OBSERVATORIO ASTRONÓMICO (La Plata). — J. OLGUÍN (Rosario) (fundador). — P. PÍ CALLEJA (San Juan). — E. R. RAIMONDI (Buenos Aires) (fundador). — J. E. REYNAL (Buenos Aires). — J. REY PASTOR (Buenos Aires) (fundador). — E. L. SAMATÁN (Buenos Aires) (fundador). — L. A. SANTALÓ (Rosario) (fundador). — J. SORTHEIX (Tucumán) (fundador). — D. T. A. DE SPELUZZI (Buenos Aires) (fundador). — E. TERRADAS (La Plata) (fundador). — F. TORANZOS (La Plata). — E. H. ZARANTONELLO (La Plata).



BUENOS AIRES

1946

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

VOLUMEN I (1936-1937), VOLUMEN II (1938-1939)

Notas y memorias de J. BABINI, C. BIGGERI, C. A. BULA, F. CERNUSCHI, J. A. DEL PERAL, J. FAYET, Y. FRENKEL, F. L. GASPAS, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, F. LEVI-CIVITA, M. PETROVICH, J. REY PASTOR, S. RIOS, F. TORANZOS.

Bibliografía, Extractos, Crónica, Revista de revistas, etc.

VOL. III (1938-1939). VOL. IV (1939). VOL. V (1940). VOL. VI (1940-1942)
Fascículos separados

- Nº 1.—GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*
- » 2.—A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*
- » 3.—MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle, du premier ordre.*
- » 4.—A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
- » 5.—NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
- » 6.—RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*
- » 7.—Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.
- » 8.—F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Projectiva.*
- » 9.—CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
- » 10.—CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*
- » 11.—R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
- » 12.—A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
- » 13.—F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
- » 14.—M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
- » 15.—G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
- » 16.—A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
- » 17.—L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.*
- » 18.—A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
- » 19.—E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*
- » 20.—J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
- » 21.—R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
- » 22.—A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*
- » 23.—V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
- » 24.—R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
- » 25.—E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

VOL. VII (1940-1941). VOL. VIII (1942). VOL. IX (1943). VOL. X (1944-1945)

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, J. BARRAL SOUTO, G. BECK, M. BUNGE, H. E. CALCAGNO, E. A. DE CESARE, E. FERRARI, V. y A. FRAILE y C. CRESPO, Y. FRENKEL, R. FRUCHT, E. GASPAS, F. L. GASPAS, A. J. GUARNIERI, J. E. HERRERA, G. KNIE, N. KRIVOSHEIN, W. MÄCHLER, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, S. RIOS, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, S. SISFANOV, A. TERRACINI.

Informes de las reuniones de la Asociación Física Argentina.

Soluciones de temas propuestos, Bibliografía, Crónica, etc.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Nº 1.—GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.*

Nº 2.—GUIDO BECK, *El espacio físico.*

Nº 3.—JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.*

Nº 4.—JULIO REY PASTOR. *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones. Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática.*

SOBRE UN PROBLEMA DE JUAN BERNOULLI

(Segunda Parte)

por J. V. USPENSKY

7. — No perdemos nada en generalidad si en vez de una sección cualquiera dada de la serie de Bernoulli $\left(\frac{P}{Q}, \frac{2\rho+1}{2Q}\right)$, consideramos la sección

$$K_0, K_1, \dots, K_{g-1} \quad (\text{A})$$

lo cual se obtiene con cambio de ρ . También está permitido suponer $0 \leq \rho < Q$. Las partes enteras

$$\left[mx + \frac{2\rho+1}{2Q} \right]; \quad x = \frac{P}{Q} \quad (\text{B})$$

al recorrer m los valores $0, 1, 2, \dots, g$ crecen desde

$$\left[0x + \frac{2\rho+1}{2Q} \right] = 0$$

hasta

$$\left[gx + \frac{2\rho+1}{2Q} \right] = g'$$

y será $g' \geq 2$ si la sección (A) tiene al menos dos unidades. Veamos ahora cuántas partes enteras sean 0, cuántas sean g' y cuántas iguales a un número dado h , donde $0 < h < g'$.

Para que sea

$$\left[mx + \frac{2\rho+1}{2Q} \right] = 0$$

es preciso que

$$mx + \frac{2\rho+1}{2Q} < 1$$

de donde

$$m < \frac{1}{x} - \frac{2\rho+1}{2P} = s + x' - \frac{2\rho+1}{2P}$$

puesto que

$$x = \frac{1}{s+x'}, \quad 0 < x' < 1.$$

Ya que

$$x' - \frac{2\rho+1}{2P}$$

no es entero la desigualdad precedente equivale a

$$m \leq s + \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right]$$

y por tanto hay precisamente

$$\alpha + 1 = s + 1 + \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right]$$

partes enteras (B) iguales a cero. Para que sea

$$\left[mx + \frac{2\rho+1}{2Q} \right] = g'$$

es preciso que

$$g' < mx + \frac{2\rho+1}{2Q}$$

por no ser la parte derecha entera, de donde

$$m > \frac{g'}{x} - \frac{2\rho+1}{2P} = g's + g'x' - \frac{2\rho+1}{2P}$$

o bien

$$m \geq g's + \left[g'x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] + 1.$$

Ya que por otra parte $m \leq g$ hay

$$\beta + 1 = g - g's - \left[g'x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right]$$

partes enteras (B) iguales a g' . Sea ahora $0 < h < g'$. Para que sea

$$\left[mx + \frac{2\rho+1}{2Q} \right] = h$$

es preciso que

$$h < mx + \frac{2\rho+1}{2Q} < h + 1$$

o bien

$$hs + hx' - \frac{2\rho+1}{2P} < m < (h+1)s + (h+1)x' - \frac{2\rho+1}{2P}$$

y, no siendo ni la parte izquierda ni la parte derecha enteros, vemos que hay

$$s + \left[(h+1)x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] - \left[hx' - \frac{2\rho+1}{2P} \right]$$

partes enteras (B) iguales a h . Designando con

$$K'_1, K'_2, \dots, K'_{g'-1}$$

términos de la serie de Bernoulli $\left(x', -\frac{2\rho+1}{2P} \right)$ conocidos dada la sección (A) vemos que ella posee la estructura siguiente

$$0^\alpha 1 0^{s_1} 1 0^{s_2} 1 \dots 0^{s_{g'-1}} 1 0^\beta$$

donde

$$s_v = s - 1 \quad \text{o} \quad s_v = s$$

según que

$$K'_v = 0 \quad \text{o} \quad K'_v = 1.$$

Es fácil ver que en el caso $\alpha = s$ conoceremos $K'_0 = 1$; lo mismo en el caso $\beta = s$ conoceremos $K'_g = 1$.

De tal manera dada la sección (A) podemos distinguir cuatro casos:

1º. En el caso $\alpha = s$, $\beta = s$ con la sección (A) está determinada la sección

$$K'_0 = 1, K'_1, \dots, K'_{q'-1}, K'_{q'} = 1$$

de la serie $(x', -\frac{2p+1}{2p})$.

2º. En el caso $\alpha = s$, $\beta < s$ está determinada la sección

$$K'_0 = 1, K'_1, \dots, K'_{q'-1}.$$

3º. En el caso $\alpha < s$, $\beta = s$ está determinada la sección

$$K'_1, K'_2, \dots, K'_{q'} = 1.$$

4º. En el caso $\alpha < s$, $\beta < s$ está determinada la sección

$$K'_1, K'_2, \dots, K'_{q'-1}.$$

8. — Sentado esto ya podemos proceder a la demostración del teorema siguiente:

Teorema 1 ()*. El período mínimo de cada sección dada de la serie (x, b) es el período de alguna serie de Bernoulli $(\frac{p}{q}, \frac{2\sigma+1}{2q})$.

Demostración. Si la sección considerada no tiene más de una unidad el teorema es cierto. En efecto, para una sección del tipo 0^α o 1^α el período mínimo es 0 o 1 y en ambos casos período de una serie de Bernoulli. Si la sección es del tipo $0^\alpha 1$ o $1 0^\alpha$ con $\alpha > 0$ el período mínimo que es $0^\alpha 1$ o $1 0^\alpha$ otra vez es período de una serie de Bernoulli. Si la sección es del tipo $0^\alpha 1 0^\beta$ con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ distinguimos dos casos:

$$\alpha \geq \beta \text{ y } \alpha < \beta.$$

(*) Véase A. MARKOFF, *loc. cit.*, pág. 32-34.

Según que tiene lugar el primer o el segundo caso los períodos mínimos de la sección son $0^{\alpha}1$ o $0^{\alpha}10^{\beta-\alpha}$ y corresponden ambos a ciertas series de Bernoulli. Ahora vamos a mostrar que suponiendo el teorema cierto para cada sección de cada serie de Bernoulli de menos de g términos quedará cierto para sección de g términos.

Sea una tal sección

$$K_0, K_1, \dots, K_{g-1} \quad (A)$$

perteneciente a la serie $\left(x, \frac{2p+1}{2Q}\right)$. Entonces, puesto

$$x = \frac{1}{s+x'}, \quad 0 < x' < 1$$

tenemos los cuatro casos discutidos en el párrafo precedente.

1º. $\alpha = s, \beta = s$. Entonces conocemos la sección

$$K'_0 = 1, K'_1, \dots, K'_{g'} = 1 \quad (A_1)$$

de la serie $\left(x', -\frac{2p+1}{2P}\right)$.

2º. $\alpha = s, \beta < s$. Entonces conocemos la sección

$$K'_0 = 1, K'_1, \dots, K'_{g'-1} \quad (A_2)$$

de la misma serie. Ambas secciones (A_1) y (A_2) tienen menos de g términos y por tanto, según la hipótesis, el período mínimo de una u otra

$$K'_0 = 1, K'_1, \dots, K'_{p-1} \quad (B)$$

es período de cierta serie de Bernoulli. Sea primero $p=1$. Entonces el período mínimo de la sección (A) es 0^s1 y el teorema es cierto. En caso $p>1$ se ve fácilmente que

$$0^s 1 0^{s_1} 1 0^{s_2} 1 \dots 0^{s_{p-1}} 1$$

es el período mínimo de la sección (A) y queda por mostrar que es también período de cierta serie de Bernoulli. Según hipótesis es (B) período de cierta serie $(\xi', \frac{\rho'}{p})$ donde $\xi' = \frac{r}{p} < 1$ y $0 \leq \rho' < p$ de modo que

$$\left[\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] - \left[\frac{\rho'}{p} \right] = \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] - \left[-\frac{2\rho+1}{2P} \right] = 1$$

$$\left[2\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] - \left[\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] = \left[2x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] - \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] = K'_1$$

$$\left[3\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] - \left[2\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] = \left[3x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] - \left[2x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] = K'_2$$

.....

En los dos casos que consideramos debe ser $2\rho+1 < 2P$. En efecto $\alpha = s$ se verifica sólo cuando

$$\left[x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] = 0$$

de donde sigue, poniendo $x' = \frac{R}{p}$, $R < P$,

$$2\rho+1 < 2R < 2P.$$

Por consiguiente

$$\left[-\frac{2\rho+1}{2P} \right] = -1.$$

Sea

$$\sigma = p - \rho' - 1;$$

entonces $0 \leq \sigma < p$,

$$\left[-\frac{2\sigma+1}{2p} \right] = -1$$

y además

$$\left[(h+1)\xi' - \frac{2\sigma+1}{2p} \right] - \left[h\xi' - \frac{2\sigma+1}{2p} \right] = K'_h$$

para $h=0, 1, 2, \dots, p-1$. Sea

$$\xi = \frac{1}{s+\xi'} = \frac{p}{sp+r} = \frac{p}{q}$$

Siendo $0 \leq \sigma < q$ se ve como en párrafo 7 que el período de la serie $\left(\xi, \frac{2\sigma+1}{2q} \right)$

será

$$0^s 10^{s_1} 10^{s_2} 1 \dots 0^{s_{p-1}} 1$$

es decir el mismo período mínimo de la sección (A).

Consideremos ahora dos otros casos que quedan.

3º. $\alpha < s$, $\beta = s$. Entonces conocemos la sección

$$K'_1, K'_2, \dots, K'_{g'} = 1 \quad (A_3)$$

de la serie $\left(x', -\frac{2\rho+1}{2p} \right)$.

4º. $\alpha < s$, $\beta < s$. Conocemos la sección

$$K'_1, K'_2, \dots, K'_{g'-1} \quad (A_4)$$

de la misma serie. Ambas secciones tienen menos de g términos; luego, por la hipótesis, el período mínimo de una u otra

$$K'_1, K'_2, \dots, K'_p$$

es período de cierta serie de Bernoulli. El período mínimo de la sección (A) será

$$0^\alpha 10^{s_1} 10^{s_2} 1 \dots 0^{s_{p-1}} 10^{s_{p-\alpha}}$$

y el teorema es evidentemente cierto en caso $p=1$. En caso $p>1$ sea $(\xi', \frac{\rho'}{p})$, donde $\xi' = \frac{r}{p} < 1$, $0 \leq \rho' < p$ serie de Bernoulli con período

$$K'_1, K'_2, \dots, K'_p$$

de modo que

$$\left[2\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] - \left[\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] = \left[2x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] - \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] = K'_1$$

$$\left[3\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] - \left[2\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] = \left[3x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] - \left[2x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right] = K'_2$$

.....

Ya que ahora $\alpha \leq s$ debe ser

$$\left[x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right]$$

un número negativo. Sea

$$\left[\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] - K = \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right]$$

y

$$\sigma + 1 = Kp - \rho'.$$

Entonces tenemos

$$\left[\xi' - \frac{2\sigma+1}{2p} \right] = \left[x' - \frac{2\rho+1}{2P} \right]$$

y

$$\left[(h+1)\xi' - \frac{2\sigma+1}{2p} \right] - \left[h\xi' - \frac{2\sigma+1}{2p} \right] = K'_h$$

para $h=1, 2, \dots, p$. Ya que K es entero positivo y $\rho' < p$ será $\sigma+1 > 0$ o $\sigma \geq 0$. Por otra parte

$$\begin{aligned}\sigma + 1 &= p \left[\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] - \rho' - p \left[\frac{Q - Ps}{P} - \frac{2\rho + 1}{2P} \right] = \\ &= p \left[\xi' + \frac{\rho'}{p} \right] - \rho' + ps - p \left[\frac{Q}{P} - \frac{2\rho + 1}{2P} \right].\end{aligned}$$

Pero

$$p \left[\frac{r}{p} + \frac{\rho'}{p} \right] - \rho' + ps \leq r + \rho' - \rho' + ps = q$$

y $2Q > 2\rho + 1$; es cierto luego que

$$\sigma + 1 \leq q$$

de donde $\sigma < q$. Por consiguiente el período de la serie $\left(\frac{p}{q}, \frac{2\sigma + 1}{2q}\right)$ es el mismo período mínimo

$$0\alpha 10^{s_1} 1 \dots 0^{s_{p-1}} 10^{s_p - \alpha}$$

de la sección (A) y el teorema queda demostrado.

Quizás no sería inútil ilustrar la demostración que acabamos de presentar con ejemplos numéricos.

Ejemplo 1. Sea dada la sección

$$010^2 10^3 10^2 100$$

de la serie $\left(\frac{9}{31}, \frac{19}{31}\right)$. La sección correspondiente de la serie $\left(\frac{4}{9}, \frac{-20}{9}\right)$ es

$$K'_1 = 0, \quad K'_2 = 1, \quad K'_3 = 0$$

y su período mínimo 01 es período de la serie $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de modo que $p=2$, $\rho'=1$. Ya que $\alpha=1$, $s=3$ hallamos

$$K = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{4}{9} - \frac{20}{9} \right] = 3$$

y $\sigma + 1 = 6 - 1 = 5$, $\sigma = 4$. El período mínimo de la sección propuesta será período de la serie $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$:

$$010^210^2$$

lo que se verifica inmediatamente.

Ejemplo 2. Sea dada la sección

$$0^310^210^310^210^3$$

de la serie $\left(\frac{9}{31}, \frac{1}{31}\right)$. La sección correspondiente de la serie $\left(\frac{4}{9}, \frac{-2}{9}\right)$ será

$$K'_0=1, K'_1=0, K'_2=1, K'_3=0, K'_4=1$$

y su período mínimo 10 corresponde a la serie $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de modo que $p=2$, $\rho'=1$.

Luego

$$\sigma = 2 - 1 - 1 = 0$$

y el período mínimo de la sección propuesta es período de la serie $\left(\frac{2}{9}, 0\right)$ el cual es

$$0^310^21$$

lo que se ve inmediatamente.

9. — *Teorema 2.* Sea

$$K_0, K_1, \dots, K_{q-1}$$

una sección de la serie (x, b) y sea la serie $\left(\frac{p}{q}, \frac{\sigma}{q}\right)$ que engendra su período mínimo.

Digo que $\frac{p}{q}$ es una convergente principal o intermedia a la fracción continua que representa x .

Demostración. El teorema es cierto si el período no tiene más de una unidad, puesto que en tal caso el dicho período no puede ser otro que

$$0, 1, 0^\alpha 1, 10^\alpha, 0^\alpha 10^{\beta-\alpha}$$

donde $\alpha \leq s$, $\alpha < \beta \leq s$ y la correspondiente fracción $\frac{p}{q}$ es $\frac{1}{0}$ o del tipo $\frac{1}{n}$ con $n \leq s+1$ y por tanto es una convergente principal o intermedia a la fracción continua

$$x = \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \dots$$

Ahora puesto que el teorema sea válido en caso que el número de términos en el período mínimo sea $< l$ vamos a demostrar que quedará válido cuando este número sea l .

Ya hemos visto que puesto

$$x = \frac{1}{s+x'}$$

será determinada cierta sección de la serie del tipo (x', b') cuyo período mínimo tiene menos de l términos. Por lo tanto si $(\xi', \frac{p'}{p})$ es la serie que le engendra será ξ' una convergente principal o intermedia a la fracción continua

$$x' = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \dots$$

Pero

$$\xi = \frac{p}{q} = \frac{1}{s+\xi'}$$

de donde sigue que ξ es una convergente principal o intermedia a la fracción continua

$$x = \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \dots$$

lo que se quería demostrar.

10. — Al número racional $\xi = \frac{p}{q}$ llamemos *aproximación óptima* respecto a la serie (x, b) si con v apropiadamente elegido la serie $(\xi, \frac{v}{q})$ tiene más términos comunes con (x, b) que cada otra serie $(\xi', \frac{v'}{q'})$ donde $\xi' = \frac{p'}{q'}$ tiene el denominador menor que el de ξ . Acerca de las aproximaciones óptimas tenemos los siguientes teoremas:

Teorema 3. Si la serie $(\frac{p}{q}, \frac{v}{q})$ engendra el período mínimo de la sección

$$K_0, K_1, \dots, K_{q-1}$$

de la serie (x, b) será $\frac{p}{q}$ una aproximación óptima.

Demostración. Si no fuera así tendríamos otra serie $(\frac{p'}{q'}, \frac{v'}{q'})$ que tiene con (x, b) al menos g términos en común mientras $q' < q$. Pero entonces el período mínimo de la sección considerada tendría $\leq q'$ términos, lo que es imposible.

Teorema 4. Si $\frac{p}{q}$ es una aproximación óptima y la serie $(\frac{p}{q}, \frac{v}{q})$ tiene g términos en común con (x, b) será $g \geq q$.

Demostración. Sea $g < q$. El período mínimo de la sección

$$K_0, K_1, \dots, K_{q-1}$$

tiene $q' \leq g$ términos y la serie que le engendra $\left(\frac{p'}{q'}, \frac{v'}{q'}\right)$ tiene con (x, b) al menos g términos, luego $\frac{p}{q}$ no puede ser una aproximación óptima.

Teorema 5. Si $\frac{p}{q}$ es una aproximación óptima y la serie $\left(\frac{p}{q}, \frac{v}{q}\right)$ tiene g términos en común con (x, b) la misma serie engendra el período mínimo de la sección

$$K_0, K_1, \dots, K_{g-1}$$

Demostración. Sea $\left(\frac{p'}{q'}, \frac{v'}{q'}\right)$ la serie que engendra dicho período mínimo. Ella tiene al menos g términos en común con (x, b) y por tanto no puede ser $q' < q$. Tampoco puede ser $q' > q$; luego $q' = q$, es decir el período mínimo tiene q términos y es idéntico con el período de la serie $\left(\frac{p}{q}, \frac{v}{q}\right)$. Luego tenemos además $p' = p$ y, como se ve fácilmente, $v' = v$.

Corolario. Cada aproximación óptima es una convergente principal o intermedia a la fracción continua que representa x . Sigue de teoremas 5 y 2.

Sea $\frac{p}{q}$ una aproximación óptima y sea $L - 1$ el máximo número de términos que la serie $\left(\frac{p}{q}, \frac{v}{q}\right)$ tiene en común con (x, b) de modo que los L -ésimos términos de dichas series son diferentes. Al número L por razón obvia llamaremos el punto de divergencia correspondiente a la aproximación óptima $\frac{p}{q}$.

Sean

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \dots$$

todas las aproximaciones óptimas colocadas en orden de denomi-

nadores crecientes y $L_1, L_2, L_3, \dots$ sus puntos de divergencia. Entonces se ve fácilmente que

$$L_1 < L_2 < L_3 < \dots$$

Ahora si deseamos encontrar un número dado N de términos de la serie (x, b) de manera más expedita debemos buscar el período mínimo de la sección

$$K_0, K_1, \dots, K_{N-1}.$$

Con tal objeto busquemos el mínimo n tal que

$$L_n > N$$

y el período de la correspondiente serie $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{v_n}{q_n}\right)$ será el período mínimo deseado. En efecto, el período mínimo buscado según Teorema 3 es idéntico con el período de alguna serie $\left(\frac{p_m}{q_m}, \frac{v_m}{q_m}\right)$ donde $m \leq n$. No puede ser $m < n$ porque entonces

$$L_m \leq N$$

y la serie tiene sólo $L_m - 1 < N$ términos en común con $(\bar{x}, b)$.

Así la solución completa del problema de Bernoulli necesita la investigación de todas las aproximaciones óptimas con sus puntos de divergencia, lo que haremos en lo sucesivo para dos casos particularmente importantes: $b=0$ y $b=\frac{1}{2}$.

11. — Sea

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots$$

el desarrollo de x en fracción continua y

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{0}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots$$

sus convergentes principales. Se sabe que

$$P_{n+1} = a_n P_n + P_{n-1}, \quad Q_{n+1} = a_n Q_n + Q_{n-1}$$

y

$$P_n Q_{n+1} - P_{n+1} Q_n = (-1)^n.$$

Además llamando x_n al cociente completo que engendra a_n tenemos

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}$$

En cuanto $a_n > 1$ entre convergentes principales $\frac{P_n}{Q_n}$ y $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ intercalamos convergentes intermedias

$$\frac{R}{S} = \frac{\mu P_n + P_{n-1}}{\mu Q_n + Q_{n-1}}$$

tomando $\mu = 1, 2, \dots, a_n - 1$. Se encuentra fácilmente

$$x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})}$$

$$x - \frac{R}{S} = \frac{(-1)^n(x_n - \mu)}{S(Q_n x_n + Q_{n-1})}$$

Vamos a examinar ahora si una convergente principal $\frac{P_n}{Q_n}$ puede ser aproximación óptima respecto a la serie $(x, 0)$. Si es así la serie $(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{K}{Q_n})$, elegido K de modo conveniente, tiene al menos Q_n términos en común con $(x, 0)$. Ajustado K de tal modo que

$$[Q_n x] = \left[Q_n \frac{P_n}{Q_n} + \frac{K}{Q_n} \right]$$

tendremos

$$[mx] = \left[m \frac{P_n}{Q_n} + \frac{K}{Q_n} \right]$$

para $m=0, 1, 2, \dots, Q_n-1$. Sea n impar de modo que

$$x = \frac{P_n}{Q_n} + \omega; \quad \omega = \frac{1}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})}$$

y

$$m P_n \equiv r_m \pmod{Q_n}; \quad 0 \leq r_m < Q_n.$$

Entonces debe ser

$$\left[m\omega + \frac{r_m}{Q_n} \right] = \left[\frac{r_m}{Q_n} + \frac{K}{Q_n} \right]$$

para $m=0, 1, 2, \dots, Q_n-1$. Ya que entonces

$$m\omega < \frac{1}{Q_n}$$

tendremos

$$\left[m\omega + \frac{r_m}{Q_n} \right] = 0$$

y así

$$\left[\frac{r_m}{Q_n} + \frac{K}{Q_n} \right] = 0; \quad m=0, 1, 2, \dots, Q_n-1.$$

En particular para $m=0$

$$\left[\frac{K}{Q_n} \right] = 0$$

de donde $0 \leq K < Q_n$. Por otra parte al variar m de 0 a Q_n-1 el resto r_m recorre todos los números $0, 1, 2, \dots, Q_n-1$ y para algún m tendremos $r_m = Q_n-1$ y por tanto

$$\left[1 + \frac{K-1}{Q_n} \right] = 0$$

lo que necesita $K < 1$. Luego necesariamente $K = 0$. Vamos a ver ahora cuántos términos tiene la serie $\left(\frac{P_n}{Q_n}, 0 \right)$ en común con $(x, 0)$, lo que equivale a buscar el mínimo valor m tal que

$$\left[m\omega + \frac{r_m}{Q_n} \right]$$

no sea 0 o, lo que es lo mismo, tal que

$$m\omega + \frac{r_m}{Q_n} \geq 1.$$

Escribiendo $r_m = Q_n - i$, donde $i = 1, 2, \dots, Q_n$, tenemos

$$m P_n \equiv -i \pmod{Q_n}$$

$$Q_{n-1} P_n \equiv -1 \pmod{Q_n}$$

lo que necesita

$$m \equiv i Q_{n-1} \pmod{Q_n}$$

o

$$m = h Q_n + i Q_{n-1}.$$

La desigualdad que deseamos satisfacer se presenta así

$$\frac{h Q_n + i Q_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}} \geq i$$

y equivale a

$$h \geq i x_n.$$

Tendremos el mínimo valor de m tomando $i = 1$ y el mínimo h tal que $h \geq x_n$. Si en caso de x racional desarrollando siempre en fracción continua con número impar de elementos

será siempre $x_n > a_n$ para n impar y hay que tomar $h = a_n + 1$, de donde resulta

$$m = Q_n + Q_{n+1}.$$

Tal será el punto de divergencia de la serie $\left(\frac{P_n}{Q_n}, 0\right)$.

Sea ahora n un número par. Entonces

$$x = \frac{P_n}{Q_n} - \omega, \quad \omega = \frac{1}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})}$$

y, ajustado K de modo conveniente, será

$$\left[\frac{r_m}{Q_n} - m\omega\right] = \left[\frac{r_m}{Q_n} + \frac{K}{Q_n}\right]$$

para $m = 0, 1, 2, \dots, Q_n$. Tomando $r_m = 0$ (lo que corresponde a $m = 0$ y $m = Q_n$) y $r_m = 1$ y teniendo en cuenta que $m\omega < \frac{1}{Q_n}$ para valores de m que consideramos tenemos que satisfacer las condiciones

$$\left[\frac{K}{Q_n}\right] = 0, \quad \left[\frac{K+1}{Q_n}\right] = 0, \quad \left[\frac{K}{Q_n}\right] = -1$$

de las cuales la primera contradice la tercera. En cuanto a la segunda y tercera ellas están satisfechas sólo para $K = -1$. Así para n par en rigor la convergente principal $\frac{P_n}{Q_n}$ no puede ser aproximación óptima, pero la serie

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{-1}{Q_n}\right)$$

por cierto tendrá términos

$$K_1, K_2, \dots, K_{Q_n-1}$$

en común con $(x, 0)$. Veamos cuál es su punto de divergencia. Sea $r_m = i$, donde $i = 1, 2, \dots, Q_n - 1$. Entonces

$$m P_n \equiv i \pmod{Q_n}$$

$$Q_{n-1} P_n \equiv 1 \pmod{Q_n}$$

y sólo a valores

$$m = h Q_n + i Q_{n-1}$$

corresponderá $r_m = i$. El valor mínimo m para cual

$$\left[-m\omega + \frac{i}{Q_n} \right]$$

no sea 0 es tal que

$$m\omega > \frac{i}{Q_n}$$

lo que equivale a

$$h > i x_n.$$

Para que m resulte mínimo hay que tomar $i=1$, $h=a_n+1$ y por tanto

$$m = Q_n + Q_{n+1}.$$

Por otra parte se ve fácilmente que jamás tendremos

$$-m\omega + \frac{i}{Q_n} < -1$$

para valores menores de m y ello significa que se verifique la igualdad

$$[mx] = \left[m \frac{P_n}{Q_n} - \frac{1}{Q_n} \right]$$

para

$$m = 1, 2, \dots, Q_n + Q_{n+1} - 1$$

y no se verifique ya para $m = Q_n + Q_{n+1}$.

CONDICIONES DE APLICABILIDAD DE LA ECUACION DE DANIEL BERNOULLI(*)

por

NICOLÁS KRIVOSHEIN.

SUMMARY. — The conditions of applicability of the Daniel Bernoulli's equation to the movement of a perfect compressible fluid are discussed.

a) All that conditions may be deduced from the consideration of the vector-field $2\omega \wedge V$ (ω — angular velocity, V — linear velocity), taken from the equations of hydrodynamics in the Lamb-Gromeko form.

b) In the potential movement, stationary or not, the Daniel Bernoulli's equation holds in the whole space occupied by the fluid. For the stationary movement, it takes the classic form; for the non-stationary, the term $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ must be jointed to the left side.

c) In the stationary vortex-motion, the Daniel Bernoulli's equation in its classic form holds for each of the surfaces $E = \text{Const}$, where $\text{grad } E = -2\omega \wedge V$; E is the specific energy or differs in a constant from it.

d) If the vortex-lines follow the stream-lines, the Daniel Bernoulli's equation holds in the whole space occupied by the fluid.

e) The case when vortex-lines and stream-lines form a right-angled network, adds nothing to the general case.

A condition for the possibility of such a movement are established, where from three special forms and one more general may be deduced.

f) Cases of applicability of the Daniel Bernoulli's equation to the non-stationary vortex motion are discussed, too. They are all of a very special character and of doubtful use in practice.

But in the most general case, *always* may be written an equation similar to the Daniel Bernoulli's, that holds on each one of the stream or vortex-lines.

It is shown that a temporal distortion (such as a solitary wave etc.) of a stationary motion, can produce a change in the distribution of the vortices, and whence, the motion after the passage of the wave etc., not always will remain stationary.

(*) Relatado en la sesión del Congreso de Matemática, Física y Astronomía, celebrado en Rosario el 21 de setiembre de 1945.

1. — *Exposición del problema.*

La ecuación de Daniel Bernoulli

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const.} \quad (1)$$

(donde: v = velocidad del fluido

g = aceleración terrestre

p = presión

γ = peso específico

z = altura del punto)

se usa en Hidráulica en esta forma (que se considera clásica) o en unas formas algo modificadas y se aplica exclusivamente a puntos que se encuentran sobre el mismo filete.

En los textos de Hidrodinámica se cita generalmente otro caso de aplicación de la misma ecuación: *cuando el movimiento es potencial, ella se aplica en toda la extensión del fluido* (*). Respecto al primer caso de aplicación, se impone entonces otra condición más: que el movimiento debe ser estacionario.

Resulta que estos no son los únicos casos de aplicabilidad de dicha ecuación, y que, aparte de eso, se puede extender el campo de sus aplicaciones variando la constante del segundo miembro.

De esto y de algunos detalles más, nos ocuparemos en la exposición que sigue.

Previamente es menester observar lo siguiente:

a) *Notaciones vectoriales*

Emplearemos las que usa el prof. Butty, con pequeñas modificaciones. En vez de las letras negritas usaremos los siguientes tipos:

Escalares: α , A ; vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$

Vector unitario $\hat{\mathbf{a}}$; valor absoluto $|\mathbf{a}|$

(*) Únicamente en la Hidráulica de Fordeheimer (traducción castellana de la 3ª edición alemana) hay mención de un caso algo más general. Véase más adelante.

Producto escalar $a \times b$

» vectorial $a \wedge b$

$\text{grad } A$, $\text{div } A$, $\text{rot } A$, $\nabla^2 A$ como de costumbre; $a \nabla b$ en vez de $(a \text{ grad}) b$.

• Las reglas de $\wedge$ y rot : *concordantes* con el sistema de coordenadas (en las figuras, *izquierdas*);

b) En lo sucesivo vamos a emplear el sistema absoluto de medidas, siendo $\rho = \frac{p}{g}$ la densidad del fluido;

c) Salvo casos especiales, vamos a tratar con fluido compresible, siendo entonces el trabajo específico (por unidad de masa) $P = \int \frac{dp}{\rho}$ en vez de $\frac{p}{\rho}$;

d) En vez del potencial $+gz$ de la gravedad pondremos $-\int^s R \times \tilde{v} ds$ (R = fuerza específica, ds = elemento del filete); en el caso de fuerzas potenciales ($R = -\text{grad } U$) pondremos U ;

e) El fluido consideraremos *perfecto* (sin viscosidad ni turbulencia).

2. — Ecuación de Lamb y Gromeko.

Una forma de las ecuaciones de hidrodinámica, deducida independientemente por varios autores (*), pero más conocida bajo estos dos nombres, es muy propicia para hacer investigaciones acerca del carácter de movimiento de los fluidos. Se la deduce fácilmente de las clásicas ecuaciones de Euler.

He aquí las ecuaciones de Lamb y Gromeko:

En forma analítica

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - X &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + w \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - u \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - Y &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + u \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Z &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

(*) Apareció en la primera edición (1879) de Hidrodinámica de H. Lamb. I. S. Groméko (profesor de la Universidad de Kazañ) la dedujo en el año 1881 o siguientes. Luego sigue Minchin (1889). Véase A. Satkwich. Aerodinámica.

En forma vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + \text{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \mathbf{R} = 0. \quad (2')$$

Donde $\mathbf{v}(u, v, w)$ es la velocidad y $\mathbf{R}(X, Y, Z)$ la fuerza exterior.

En adelante usaremos $2\omega = \text{rot} \mathbf{v}$ para indicar la doble velocidad angular de las partículas.

Significado físico de los términos.

$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ = variación del campo de velocidades con el tiempo (*)

$\frac{v^2}{2}$ = energía cinética específica (por unidad de masa)

$\text{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 2\omega \wedge \mathbf{v}$ = un vector que más adelante estudiaremos y que desempeña el papel principal en el fenómeno.

$\frac{1}{\rho} \text{grad} p$ = empuje ejercido sobre el fluido por la diferencia de presiones.

$\mathbf{R}$ = empuje ejercido por las fuerzas exteriores (gravedad, etc.).

3. — Vector $2\omega \wedge \mathbf{v}$ y su significado.

Por la conocida propiedad del producto vectorial, este vector debe ser perpendicular tanto a $\mathbf{v}$ como a ω (fig. 1). Sucediendo

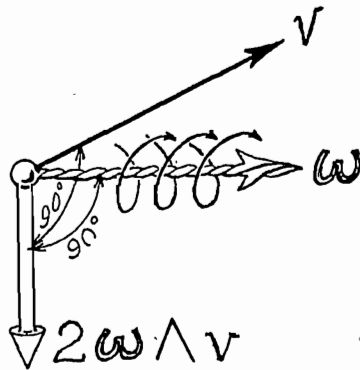


Fig. 1

(*) No es aceleración, la cual se expresa por $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$

así en todos los puntos del espacio ocupado por el fluído, deben los vectores $2\omega \wedge v$ formar un campo vectorial cuyas líneas son normales tanto a los filetes como a las líneas de vórtice.

Este campo en el caso general no es solenoidal, es decir $\text{div}(2\omega \wedge v) \neq 0$, lo que se comprueba por un ejemplo sencillo (fig. 2). En un chorro cilíndrico que se mueve a través de

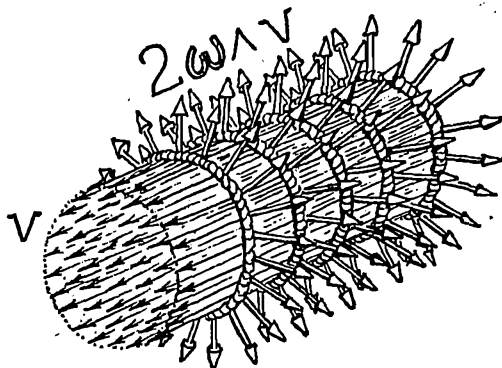


Fig. 2

un líquido en reposo, los vórtices forman una envoltura alrededor del chorro. Los vectores $2\omega \wedge v$ se dirigen entonces hacia afuera de dicha envoltura, siendo adentro (por el teorema de Gauss) $\text{div}(2\omega \wedge v) > 0$.

En un movimiento rectilíneo $2\omega \wedge v$ siempre se dirige desde la región de velocidades grandes hacia la de velocidades menores. Este hecho es de importancia y más adelante volveremos a analizarlo.

En el caso de un movimiento curvilíneo cuya velocidad no crece hacia el centro de curvatura de los filetes, $2\omega \wedge v$ se dirige como en la fig. 3, es decir, hacia aquel centro.

En las ecuaciones (2) o (2') los términos tienen la dimensión de fuerza específica (referida a la unidad de masa) (*). Por eso el vector $2\omega \wedge v$ debe también tener carácter de fuerza o por lo menos debe poder interpretarse como tal.

(*) La dimensión de la fuerza específica es igual a la de la aceleración.

$-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ y $-\text{grad} \frac{v^2}{2}$ son fuerzas de inercia.

$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p$ es la fuerza resultante debida a la desigualdad de las fuerzas interiores p ;
 R es la fuerza exterior.

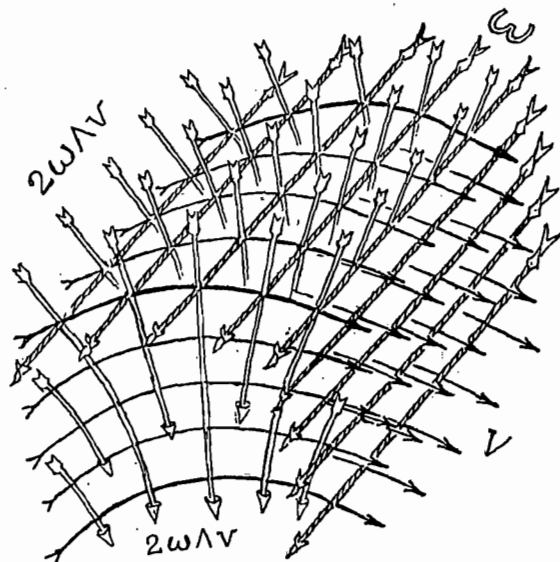


Fig. 3

Si se vuelve a seguir, paso a paso, la deducción de las ecuaciones de Lamb y Gromeko, se verá que $2\omega \wedge v$ es también una parte de las fuerzas de inercia. En efecto:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p - R = 0 \quad (3)$$

(ecuación de Euler en forma resumida)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (4)$$

$\frac{dv}{dt}$ = aceleración total

$\frac{\partial v}{\partial t}$ = parte de la aceleración, debida a la variación del campo

$v \nabla v$ = parte debida al traslado de las partículas en el campo.

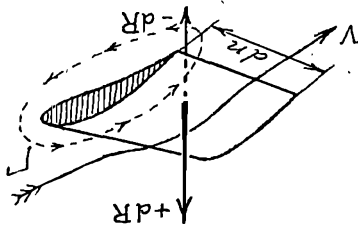
Luego, por la conocida fórmula vectorial:

$$v \nabla v = \text{grad} \frac{v^2}{2} + \text{rot } v \wedge v \quad (5)$$

descomponiéndose la segunda parte de la aceleración, a su vez, en dos partes, a saber: $\text{grad} \frac{v^2}{2}$ — debida a la desigualdad de los *valores absolutos* de la velocidad (nótese que $v^2 = |v|^2$) en diferentes puntos; $\text{rot } v \wedge v$ — debida a dos causas: 1) a la desigualdad de las direcciones de la velocidad y 2) a la parte de la desigualdad de los valores absolutos que distinguen el movimiento con vórtices del movimiento potencial.

De todo lo dicho se ve que $2\omega \wedge v = \text{rot } v \wedge v$ tiene también el carácter de fuerza específica y que esta fuerza es debida a la presencia de los vórtices en el campo de velocidades. Llamaremos por eso dicho vector «*empuje de los vórtices*» (*) y atribuiremosle otro signo, como en las otras partes de la fuerza de inercia:

(*) Parece sorprendente la analogía de este empuje con el empuje de los vórtices adheridos a un cuerpo que se mueve en el fluido, y definido tal empuje por el teorema de Yukovsky $dR = \Gamma v \, dn$ (fig. a). Γ es la circulación alrededor del cuerpo. $+dR$ actúa sobre el cuerpo y $-dR$ sobre el fluido.



Pero esto es nada más que una analogía. 1) La fuerza $-dR$ de la fig. a es de otro signo que la fuerza Q de la fórmula (6). 2) Los vórtices adheridos al cuerpo se desplazan en el fluido, mientras que los vórtices verdaderos (ω) flotan con él (según el 2º teorema de Helmholtz).

$$Q = -2\omega \wedge v \quad (6)$$

En resumen puede decirse que *el movimiento del fluido se produce de tal manera como si sobre él actuara una fuerza adicional* $-2\omega \wedge v$ (*).

4. — Caso cuando el movimiento puede permanecer potencial.

En el movimiento potencial $\omega = 0$ y por lo tanto $2\omega \wedge v = 0$; la ecuación (2') se convierte entonces en

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p - R = 0. \quad (7)$$

Para que el movimiento *permanezca* potencial (y no solamente lo sea instantáneamente) es preciso que también $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$.

Para cumplir esta condición hay que anular el rotor de (7):

$$2 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{rot grad} \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} \text{rot grad} p - \text{rot} R = 0 \quad (8)$$

lo que conduce a

$$-R = \text{grad} U \quad (10)$$

es decir que *las fuerzas exteriores deben tener potencial* (teorema de Lagrange).

Siendo muy raros los casos cuando R carezca de potencial (**) vamos a limitar nuestra consideración al caso de fuer-

(*) Nótese otra analogía: con la aceleración de Coriolis. Aquella es igual a $2\omega \wedge v$ donde ω es la velocidad angular del movimiento de arrastre y v , la velocidad relativa (aquí es al revés). Hay por eso una plena coincidencia de las fórmulas, pero el signo de la fuerza de inercia es otro.

(**) Por ejemplo, fuerzas electromagnéticas. Las fuerzas de gravedad en un fluido heterogéneo (térmofón, etc.) representan un caso distinto: el teorema de Lagrange tampoco vale pero por otra causa ($\rho \neq f(p)$).

zas potenciales, tanto para el movimiento potencial como también para el de vórtices. Se impone pues que

$$-R \operatorname{grad} U \quad (10)$$

donde U es el potencial de las fuerzas exteriores.

Teniendo también en cuenta lo dicho en 1, b) se transforma la (7) en

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} + P + U \right) = 0 \quad (11)$$

La expresión entre paréntesis es la energía específica total del fluido, a saber:

$$\frac{v^2}{2} = \text{energía cinética}$$

$$P = \text{energía de presión}$$

$$U = \text{energía de las fuerzas exteriores.}$$

Ahora podemos establecer las condiciones de aplicabilidad de la ecuación de Daniel Bernoulli para este caso.

a) Si el movimiento es *estacionario* $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, la expresión entre paréntesis da directamente el primer miembro de la ecuación de Daniel Bernoulli:

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + P + U = \text{Const}} \quad (12)$$

que en tal caso es válida en toda la extensión del fluido.

b) Si el movimiento es variable $\left(\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0 \right)$ debe por lo menos ser $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$, es decir $\operatorname{rot} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$; por eso, siendo

$$v = \operatorname{grad} \phi \quad (13)$$

donde Φ es el potencial de las velocidades, resulta

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \text{grad } \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (14)$$

y la ecuación de Daniel Bernoulli recibe un término adicional

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + U = \text{Const}} \quad (15)$$

aplicable también en toda la extensión del fluido.

Las formas (12) y (15) son conocidas y clásicas.

5. — Movimientos estacionarios con vórtices.

Esta es la clase más importante de movimientos porque en ella ya se manifiestan las propiedades básicas de los movimientos en general, los que no se ven todavía en el movimiento potencial. Los movimientos más complicados agregan poco a estas propiedades.

La ecuación de un movimiento estacionario se deduce de la (2') poniendo $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$; vamos a mantener también la condición $R = -\text{grad } U$. Entonces resulta

$$\boxed{\text{grad } \left(\frac{v^2}{2} + P + U \right) + \text{rot } v \wedge v = 0} \quad (16)$$

Ante todo, de esta ecuación se deduce que en un movimiento estacionario $\text{rot } v \wedge v$ debe formar un campo potencial, condición conocida como necesaria para que pueda ser estacionario el movimiento (*). Entonces resulta que la fuerza Q definida en (6) tendrá un potencial; denominaremoslo $-E$:

$$Q = -\text{rot } v \wedge v = +\text{grad } E. \quad (17)$$

(*) Véase H. LAMB, *Hydrodynamics* (1924), pág. 226.

Sustituyendo esto en (16):

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + P + U \right) = + \text{grad } E \quad (18)$$

o bien

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + P + U = \text{Const} + E} \quad (19)$$

que es la forma de la ecuación de Daniel Bernoulli para el movimiento estacionario.

La cantidad E puede expresar la energía total de una partícula diferenciando de ella en una constante de integración.

Siendo el vector $\text{grad } E = -2\omega \wedge v$ perpendicular tanto a ω como a v , las superficies $E = \text{Const}$ están formadas por redes de filetes y de líneas de vórtice (fig. 4).

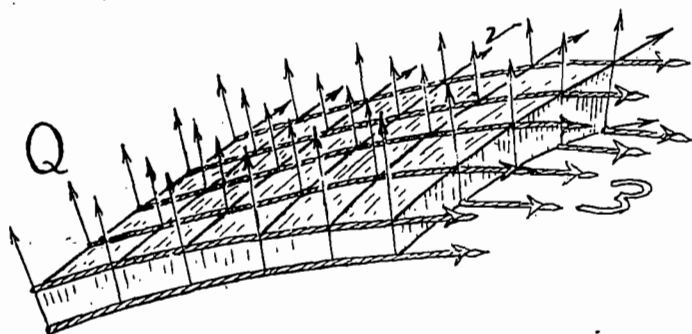


Fig. 4

Por consiguiente, las condiciones de aplicabilidad de la ecuación de Daniel Bernoulli en este caso son las siguientes:

a) En cada una de las superficies formadas por la red de filetes y líneas de vórtice, la ecuación se aplica en su forma primitiva

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + P + U = \text{Const}} \quad (20)$$

b) Para puntos que están sobre diferentes superficies, hay que introducir una variación de la constante del segundo miembro, de acuerdo a (19).

Esta variación puede calcularse así:

$$E_2 - E_1 = - \int_{(1)}^{(2)} 2\omega \wedge \mathbf{v} \times d\sigma$$

donde $d\sigma$ es un elemento del camino de integración. Siendo $2\omega \wedge \mathbf{v}$ un vector potencial, el resultado no depende del camino.

6. — Aplicaciones.

En los textos de Hidráulica se suele aplicar la ecuación de Daniel Bernoulli a un solo filete, omitiendo los casos a) y b) del párrafo anterior. Mientras tanto, esos casos presentan un interés práctico.

Movimiento rectilíneo en un canal (fig. 5)

En este caso, como fácilmente se demuestra, las isótacas de una sección transversal representan líneas de vórtice (en la fig.

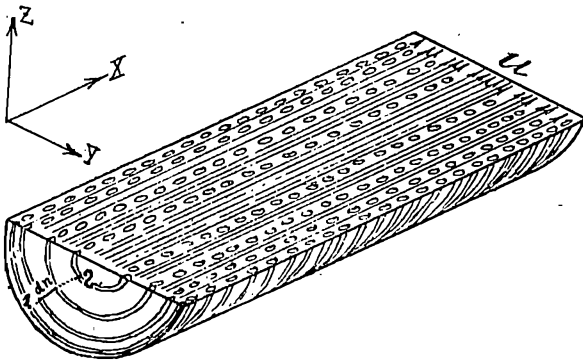


Fig. 5

5 las terminaciones de los vórtices se representan simbólicamente con circulitos, aunque sea continua su distribución), y

$$|\omega| = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial n} \quad (22)$$

donde dn es un elemento de la normal a las isótacas. Entonces de (21) sale

$$E_2 - E_1 = \int_{(1)}^{(2)} 2|\omega|u \, dn = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u \cdot dn = \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 \quad (23)^*$$

Sustituyéndolo en (19) y teniendo en cuenta que $|v|=u$, se obtiene

$$P + U = \text{Const} \quad (24)$$

lo que constituye una demostración sencilla de que en este caso la distribución de las presiones será igual a la hidrostática.

Canal convergente o divergente (fig. 6)

En este caso puede determinarse previamente la distribución de la función E en una de las secciones (por ejemplo en I) (**).

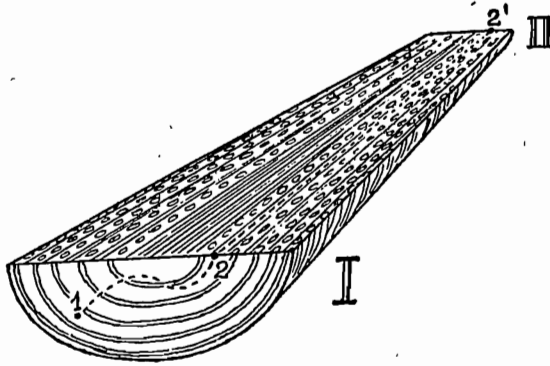


Fig. 6

(*) Esto constituye una demostración de lo dicho en el párrafo 3 sobre la relación entre E y las velocidades.

(**) Es ventajoso elegir la constante de integración de tal manera que E sea igual a la energía total de las partículas.

Si la convergencia no es demasiado brusca, (24) vale con aproximación para cada sección. Aplicando entonces (19) a las secciones I y II, resulta:

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} + (P_1 + U_1) - (P_2 + U_2) = E_1 - E_2. \quad (25)$$

La diferencia de las energías cinéticas se compone pues de dos partes: a) de la diferencia de los valores $(P + U)$ (con signo invertido); b) de la diferencia $E_1 - E_2$ pasando de punto a punto en la misma sección (*).

De esta manera se tiene una ecuación general para todo el canal (la (19)).

De ella se ve que si se toman puntos sobre dos filetes en dos secciones (fig. 7), resulta $E_4 - E_3 = E_2 - E_1$, y siendo

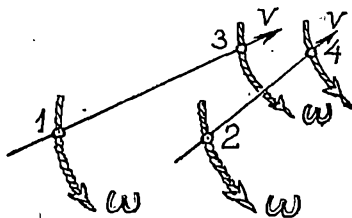


Fig. 7

$P + U = \text{Const.}$ en cada sección, se deduce que las diferencias de la función E y por lo tanto, también las diferencias de $\frac{v^2}{2}$ son las mismas en ambas secciones. Pero como v^2 crece más rápidamente que v , se deduce el conocido resultado que en la sección donde las velocidades son mayores, sus diferencias son menores.

7. — Movimiento con vórtices estacionarios.

Según el segundo teorema de Helmholtz, los vórtices se desplazan juntos con el fluido (empleando el lenguaje prác-

(*) Siendo $E = \text{cont.}$ en cada filete y en cada línea de vórtice.

tico, «flotan a la deriva» (*). Por lo tanto, en el movimiento estacionario, siendo una superficie $E = \text{Const}$ enteramente cubierta de líneas de vórtice, estas líneas no permanecen en sus posiciones, sino se desplazan en el sentido de v , deslizándose sobre dicha superficie.

Por eso se debe crear constantemente nuevos vórtices allí donde comienzan los filetes, para cubrir la falta ocasionada por la fuga de los vórtices anteriormente creados.

Resulta, pues, que la red de vórtices está en constante movimiento. Si el movimiento del fluido es laminar, el movimiento de los vórtices es invisible por ser continua su distribución, pero en el movimiento turbulento a veces se les puede individualizar y percibir su desplazamiento (**).

Ahora bien, puede encontrarse una subclase de movimientos donde los vórtices permanecen inmóviles. Esto implica que las líneas de vórtice coincidan con los filetes ($\omega \parallel v$), fig. 8.

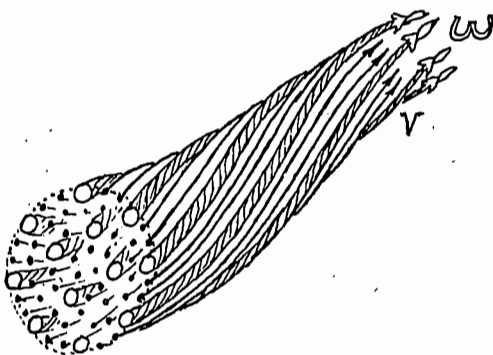


Fig. 8

En este caso también debe efectuarse continuamente el proceso de creación de vórtices, pero se lo realiza de otro modo: no se crean nuevos vórtices sino se alargan los *existentes*.

(*) La numeración de los teoremas de Helmholtz no es igual en todos los libros.

(**) El ejemplo, el más elocuente, representa la doble fila de vórtices estudiada por von Kármán.

En lo que se refiere a la ecuación de Daniel Bernolli para este caso, siendo

$$2\omega \wedge v = 0 \quad (26)$$

es también $\text{grad } E = 0$ es decir $E = \text{Const}$, y la ecuación (20) va a valer en todo el espacio, igual como en el caso de un movimiento potencial (*).

8. — Movimiento con vórtices normales.

Consideremos ahora el caso contrario: líneas de vórtice normales a los filetes ($\omega \perp v$) fig. 9.

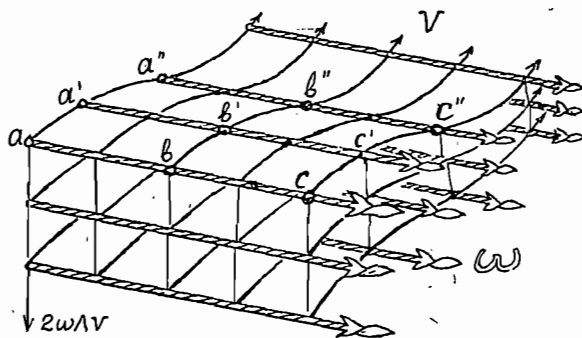


Fig. 9

En lo que se refiere a la aplicabilidad de la ecuación de Daniel Bernoulli, este caso no difiere en nada del caso general del párrafo 5, porque el vector $2\omega \wedge v$ no se anula.

Interesante es solamente la condición de existencia de esta subclase de movimientos.

Teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo anterior respecto del segundo teorema de Helmholtz, podemos formular la condición de existencia como sigue: el movimiento debe ser tal que una línea $a-b-c$, que es una línea de vórtice, normal a los filetes, después de desplazarse con el fluido a nuevas posiciones

(*) En los textos de Hidráulica este caso no se considera. Solamente Forchheimer lo menciona. Al cambio, se lo usa mucho en Aerodinámica, particularmente en la teoría de las alas.

$a' - b' - c'$, $a'' - b'' - c''$, etc., sea allí también normal a los filetes.

Ahora bien, todos los vórtices están en la superficie abc , $a'b'c'$, $a''b''c''$ (fig. 8) no habiendo componente normal a ella, y por lo tanto, *en dicha superficie el movimiento es potencial*, pudiendo trazarse una red de filetes y líneas equipotenciales (fig. 10, líneas negras gruesas y finas) (*).

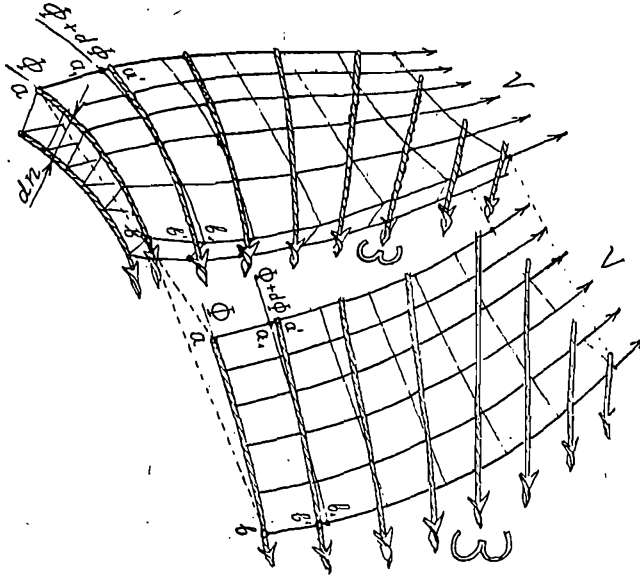


Fig. 10

Tracemos ahora una línea de vórtice ab que coincide con la primera línea equipotencial ab . Al cabo de un tiempo dt este vórtice se desplazará a una nueva posición $a'b'$ tal que

$$aa' = |v_a|dt; \quad bb' = |v_b|dt \quad (27)$$

pero, según la regla del movimiento potencial,

$$|v_a| = \frac{d\Phi}{aa_1}; \quad |v_b| = \frac{d\Phi}{bb_1} \quad (28)$$

(*) La red (salvo caso particular $dn = \text{const}$) no será cuadrada sino solamente octogonal, por ser variable el espesor dn de una capa infinitamente delgada entre dos superficies vecinas.

y sustituyendo en (27)

$$aa' = \frac{d\phi dt}{aa_1}; \quad bb' = \frac{d\phi dt}{bb_1} \quad (29)$$

Las líneas isopotenciales son normales a los filetes; por eso, para cumplir la condición puesta en el comienzo, las líneas de vórtice deben coincidir con ellos, es decir

$$aa' = aa_1; \quad bb' = bb_1 \quad (30)$$

Entonces, de la (29) sigue, que $aa_1 = bb_1$, es decir, que las líneas equipotenciales deben ser equidistantes.

Ahora bien, de (28) resulta que $|v_a| = |v_b|$, o bien

$$\omega \nabla v \times v = 0 \quad (31)$$

es decir que la velocidad no debe variar a lo largo de una línea de vórtice.

Se puede ver que esta condición se cumple en los tres casos siguientes:

- a) Movimiento rectilíneo uniforme (como en la fig. 5);
- b) Movimiento plano (como en la fig. 9);
- c) Movimiento con eje de simetría y vórtices circulares (fig. 11), y que hay un caso más general.

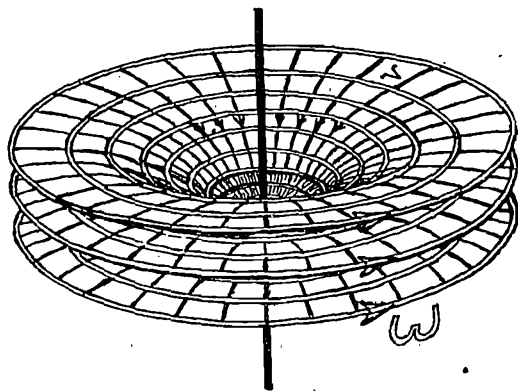


Fig. 11

9. — Movimientos variables.

En los textos de Hidráulica se los menciona como imposibles para aplicar la ecuación de Daniel Bernoulli, salvo el movimiento ya considerado en el párrafo 4 (ecuación 15).

Mientras tanto, se pueden encontrar algunos casos de su aplicación.

Tomando el rotor de la ecuación (2')

$$\frac{\partial \operatorname{rot} v}{\partial t} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + \operatorname{rot} (\operatorname{rot} v \wedge v) + \frac{1}{\rho} \underbrace{\operatorname{rot} \operatorname{grad} p}_=0 - \operatorname{rot} R = 0$$

o bien

$$2 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{rot} (2\omega \wedge v) - \operatorname{rot} R = 0. \quad (31)$$

Se pueden distinguir los siguientes casos:

a)	R tiene potencial ($\operatorname{rot} R = 0$)	$\left\{ \begin{array}{l} a') \ 2\omega \wedge v \text{ es un campo} \\ \text{potencial } (\operatorname{rot} \omega \wedge v = 0) \\ a'') \ 2\omega \wedge v \text{ es un campo} \\ \text{arbitrario} \end{array} \right.$	$\left \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0 \end{array} \right.$
b)	R no tiene potencial ($\operatorname{rot} R \neq 0$)	$\left\{ \begin{array}{l} b') \ 2\omega \wedge v \text{ es un campo} \\ \text{potencial } (\operatorname{rot} (\omega \wedge v) = 0) \\ b'') \ 2\omega \wedge v \text{ es un campo} \\ \text{arbitrario} \\ b''') \text{ Caso particular} \\ \operatorname{rot} (2\omega \wedge v) = \operatorname{rot} R \end{array} \right.$	$\left \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$

$$a') \operatorname{rot} R = 0; \quad R = -\operatorname{grad} U; \quad \operatorname{rot} (2\omega \wedge v) = 0.$$

Es un caso muy frecuente en la práctica: cuando el movimiento era durante un cierto tiempo estacionario, y luego, por un cambio en las fuerzas exteriores, se convierte en variable. Como ejemplo pueden citarse olas largas en los canales con corriente.

La configuración de los vórtices antes del cambio ocurrido era tal que satisfacía a la condición $\operatorname{rot} (2\omega \wedge v) = 0$.

Cuando se produce el cambio, *en el primer instante* $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$, es decir, no cambia el campo de vórtices. Pero en el instante siguiente, por cambiarse el campo de velocidades ($\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$!), se rompe dicha condición y por lo tanto $\frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0$.

En resumen, *los cambios en el campo de vórtices aparecen con cierto atraso en comparación con los cambios en el campo de velocidades*. Por ejemplo, si v cambia proporcionalmente a t , ω cambiará proporcionalmente a t^2 (*).

Todo esto indica que *la ecuación de Daniel Bernoulli puede aplicarse en la forma (19) solamente a la fase inicial del movimiento variable*, mientras que para las fases más avanzadas es inaplicable, por carecer de potencial el vector $2\omega \wedge v$ (véase el caso siguiente).

Esto induce a una interesante suposición sobre la estabilidad de los movimientos: si se perturba un movimiento estacionario, aunque la perturbación fuese causada por fuerzas potenciales, difícilmente se establezca otra vez un movimiento estacionario después de la desaparición de las fuerzas perturbadoras.

Con esto de ninguna manera se quiere decir que las fuerzas perturbadoras, siendo potenciales, pueden crear vórtices: el segundo teorema de Helmholtz es siempre válido en el fluido perfecto, de manera que los vórtices son los mismos que antes de la perturbación, y sólo se ha cambiado su distribución en el fluido; la nueva distribución ya no puede producir movimiento estacionario.

Resulta que las fases avanzadas del movimiento (a') son de carácter (a''), al que pasamos ahora.

$$a'') \text{ rot } R = 0; \quad R = -\text{grad } U; \quad \text{rot}(2\omega \wedge v) \neq 0$$

La ecuación de movimiento toma la forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + P + U \right) U + 2\omega \wedge v = 0 \quad (32)$$

(*) Con esas proporcionalidades el autor no pretende expresar resoluciones exactas: es simplemente una manera de describir el carácter de los fenómenos.

donde $\text{rot}(2\omega \wedge v) \neq 0$ y por lo tanto, las líneas de vórtice con los filetes ya no forman superficies (fig. 12), salvo un caso particular (véase más adelante).

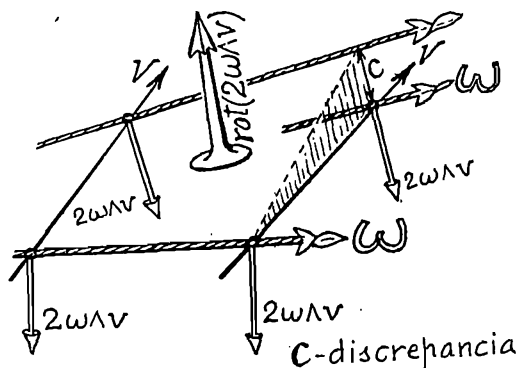


Fig. 12

Por eso, es imposible aplicar la ecuación de Daniel Bernoulli en toda una superficie. Pero se puede pensar en su aplicación en los filetes aparte y en las líneas de vórtice aparte.

Para eso es preciso agregarle un término adicional $\int \frac{\partial v}{\partial t} \times d\sigma$ para tener en cuenta las fuerzas de inercia debidas al cambio del campo de velocidades. El procedimiento es análogo al del párrafo 4, caso b), ecuación (15), pero aquí no se puede expresar el término adicional en la forma $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ por ser $\text{rot} \frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$, y por lo tanto, la aplicación práctica sería más difícil.

El caso particular que se ha mencionado, es cuando $\text{rot}(2\omega \wedge v)$ es coplanar con ω y v . Entonces los filetes y líneas de vórtice forman superficies. Pero en este caso la función cuyas superficies de nivel son estas superficies, no es energía, necesitándose por lo tanto introducir un factor integrante para poder establecer una ecuación análoga a la de Daniel Bernoulli.

b') $\text{rot} R \neq 0$; $\text{rot}(2\omega \wedge v) = 0$.

Para este caso se puede repetir todo lo dicho respecto al caso a') con la sola modificación que en vez de U figurará $-\int R \times d\sigma$.

También aquí, solamente *al instante inicial se puede aplicar la ecuación de Daniel Bernoulli.*

$$b'') \operatorname{rot} R \neq 0; \operatorname{rot} (2\omega \wedge v) \neq 0.$$

Es análogo al caso a'') con la modificación introducida en b') (*).

$$b''') \operatorname{rot} (2\omega \wedge v) = \operatorname{rot} R.$$

Es un caso muy particular. Hay que elegir las fuerzas R de tal manera que compensen el efecto de la mala distribución de los vórtices, consiguiendo $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$. Esto debería hacerse aparte para cada caso de movimiento y difícilmente se realizaría en la práctica.

10. — *Resumen.*

a. Los criterios de aplicabilidad de la ecuación de Daniel Bernoulli se forman por medio del vector $2\omega \wedge v$ de las ecuaciones de Lamb y Gromeko.

b. En el movimiento potencial, sea estacionario o no, la ecuación de Daniel Bernoulli es aplicable en toda la extensión del fluido; cuando el movimiento no es estacionario, se agrega $\frac{\partial \phi}{\partial t}$.

c. En el movimiento estacionario con vórtices, la ecuación de Daniel Bernoulli es aplicable en las superficies $E = \text{Const}$ (siendo $\operatorname{grad} E = -2\omega \wedge v$; E = energía específica total o difiere de ella en una constante).

d. En el movimiento con vórtices estacionarios (que coinciden con los filetes), la ecuación de Daniel Bernoulli es aplicable en toda la extensión del fluido.

e. El movimiento con vórtices normales a los filetes no difiere del caso general. Hay tres subclases particulares de este movimiento y un caso más general.

f. Entre los movimientos variables con vórtices hay pocos casos de aplicabilidad de la ecuación de Daniel Bernoulli, y estos son muy particulares.

Asunción, 8 de Setiembre 1945.

(*) En todos los casos donde $\operatorname{rot} R \neq 0$, es de utilidad el uso del teorema de Björknes sobre la variación de la circulación. Pero esto no tiene relación directa con la ecuación de Daniel Bernoulli.

SOBRE LA ECUACION FUNCIONAL $f(f(x)) = \frac{1}{x}$

por

J. L. MASSERA y A. PETRACCA

Nos proponemos resolver el tema N^o. 50 (esta *Revista*, vol. X, pág. 154) propuesto por L. A. Santaló y que decía:
Estudiar la ecuación funcional

$$f(f(x)) = \frac{1}{x}. \quad (1)$$

Observando que la inversión $1/x$ en el plano complejo está dada por el producto de dos simetrías, una respecto del círculo de centro en el origen y radio unidad y otra respecto del eje real, y que la transformación involutoria

$$z = (1-x)/(1+x).$$

conserva las simetrías y transforma la circunferencia y el eje real del plano x en el eje real y el eje imaginario del plano z , se ve que el problema de resolver la ecuación (1) es equivalente al de resolver la ecuación

$$f(f(x)) = -x. \quad (2)$$

Por ejemplo, la ecuación (2) se satisface inmediatamente por $f(x) = ix$. De aquí se deduce que una solución de la ecuación funcional propuesta será

$$f(x) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}i}{1 + \frac{1-x}{1+x}i} = \frac{(1+i)x + (1-i)}{(1-i)x + (1+i)}$$

como es fácil comprobar.

Probaremos el siguiente teorema:

La solución general de la (2) está dada implícitamente por la relación

$$F(x^2, y^2) = 0 \quad (3)$$

en que F es una función simétrica arbitraria.

Debe entenderse que este enunciado significa lo siguiente: 1º. Toda solución $y=f(x)$ de la (2) es una función implícita definida por una relación del tipo (3); 2º. Si una relación del tipo (3) define por lo menos una función implícita uniforme, hay por lo menos una de estas funciones implícitas que es solución de la (2).

He aquí la demostración:

1º. Sea $y=f(x)$ una solución de la (2). Se tiene

$$y=f(x), \quad f(y)=-x, \quad -y=f(-x), \quad f(-y)=x,$$

y multiplicando estas igualdades se obtiene la relación

$$y^2 f(y) f(-y) = x^2 f(x) f(-x) \quad (3')$$

que es del tipo (3).

2º. Sea una relación del tipo (3) que defina por lo menos una función implícita. Entonces la ecuación

$$F(u, v) = 0 \quad (4)$$

tiene por lo menos una solución $v=\varphi(u)$ (uniforme) definida en un conjunto U . No hacemos ninguna hipótesis acerca de la naturaleza de esta función ni del conjunto U ; pero si la función es continua admitiremos que U es un recinto. Sea V la imagen de U dada por la función φ .

Supongamos primero que U y V no tienen puntos comunes. Reduciendo si es necesario el conjunto U , podemos suponer que la correspondencia entre U y V es biunívoca. En virtud de la simetría de F , la inversa de φ es también una función implícita definida por (4). Entonces queda definida en el conjunto $W=U+V$ una función implícita de (4) que tiene carácter involutorio.

Si U y V tuvieran una parte común W , a cada punto w de W corresponde, por pertenecer a U , el punto v de V , y por pertenecer a V , un punto u de U , dados por las relaciones

$$v = \varphi(w), \quad w = \varphi(u).$$

Se tiene entonces:

$$F(w, v) = 0 \quad \text{y} \quad F(u, w) = 0,$$

y también, por la simetría de F ,

$$F(w, u) = 0.$$

Pueden ocurrir ahora dos cosas:

a) $u \equiv v$ para todo w de W o de una parte de W , que llamaríamos W de ahora en adelante. Como $u \equiv v$ pertenece a W tenemos también en este caso definida una correspondencia involutoria en W dada por una función implícita de (4).

b) Si $u \equiv v$, es posible entonces, por reducción del conjunto U , obtener dos conjuntos U y V separados, y quedamos reducidos al caso ya indicado.

Definida así, por cualquiera de los caminos indicados una correspondencia involutoria en w , vamos a distinguir dos casos:

A) Dos puntos correspondientes de W , o de una parte de W , no están nunca sobre una misma semirrecta que parte del origen. Definimos entonces la función $y = f(x)$ como aquella determinación de $\sqrt{\varphi(x^2)}$ que cumple la condición

$$0 < \text{Arg}(y/x) < \pi. \quad (5)$$

Esta función es una implícita de las definidas por (3). Además, si $z = f(f(x)) = f(y)$, se tendrá

$$z = \sqrt{\varphi(y^2)} = \sqrt{x^2} = \pm x$$

que, junto con las condiciones (5) y

$$0 < \text{Arg}(z/y) < \pi$$

demuestra que $z = -x$, de modo que f es una solución de la (2).

B) Dos puntos correspondientes están siempre sobre una misma semirrecta que parte del origen. Suprimiendo entonces en W los puntos dobles de la involución, si los hubiera, se puede descomponer, de infinitas maneras, el conjunto restante en dos conjuntos W' y W'' sin puntos comunes, tales que cada uno de

ellos sea imagen del otro en la correspondencia involutoria. Si W es un conjunto abierto y φ es continua, se puede obtener dos conjuntos W' y W'' que sean ambos recintos.

Sean X', X''' los conjuntos que se obtienen de W' por medio de la transformación $x = \sqrt{u}$, y X'', X'''' los que se obtienen de W'' . Los conjuntos de cada par son simétricos respecto del origen. Podemos suponer que todos estos conjuntos carecen de puntos comunes. Definimos ahora en el conjunto

$$X = X' + X'' + X''' + X''''$$

la función uniforme $y = f(x) = \sqrt{\varphi(x^2)}$, tomando las siguientes determinaciones del radical:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x \text{ pertenece a } X', & y \text{ pertenece a } X'' \\ \text{» } x \text{ » » } X''', & y \text{ » » } X'''' \\ \text{Si } x \text{ pertenece a } X'', & y \text{ pertenece a } X''' \\ \text{» } x \text{ » » } X''', & y \text{ » » } X'. \end{array}$$

Entonces $f(x)$ es una implícita definida por (3) que satisface a la (2).

Es claro que podría haberse considerado, a los efectos de la demostración de la segunda parte del teorema, solamente el caso B. Pero entonces se perdería la posibilidad, especialmente interesante, de definir la función f en un recinto, posibilidad que, si la función φ lo permite, está brindada por las construcciones de los subcasos a) y A).

Ejemplos.

1º. La función x^i que satisface a la (1), se transforma como hemos dicho en una solución $y = f(x)$ de la (2) que está dada por la ecuación

$$\left(\text{Log } \frac{1-x}{1+x} \right)^2 + \left(\text{Log } \frac{1-y}{1+y} \right)^2 = 0$$

que es del tipo (3).

2º. La función ix , solución de la (2), satisface a la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0.$$

3º. La ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

define la función $\sqrt{1-x^2}$, cuyas dos ramas, que pueden separarse en el plano tajeado según el segmento $(-1, 1)$, son soluciones de la (2).

4º. En el plano tajeado según los diámetros horizontal y vertical del círculo de radio $\sqrt{4/3}$, pueden definirse (de acuerdo al criterio expuesto en A)), ramas uniformes de la función

$$y = \sqrt{\frac{-x^2 + \sqrt{4-3x^4}}{2}}$$

dada implícitamente por la ecuación

$$x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 1,$$

que son soluciones de la (2).

5º. Sea la ecuación

$$x^2 y^2 = K^2. \quad (6)$$

No puede encontrarse ningún *recinto* en que pueda definirse una rama continua y uniforme que verifique la condición A). Para encontrar una solución de la (2) a partir de esta ecuación, se puede, por ejemplo, definir $y = K/x$ en el primer y tercer cuadrantes (abiertos) y $y = -K/x$ en el segundo y cuarto.

Este ejemplo permite resolver una pequeña dificultad. Podría ocurrir que la ecuación (3') fuera una identidad, es decir que sus dos miembros fueran constantes. Entonces la (3') no define a $f(x)$ como función implícita. En este caso la (3') se reduce a la (6).

6º. La ecuación (K real)

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} = K^2 + \frac{1}{K^2}.$$

tiene las soluciones $y = \pm Kx$, $y = \pm x/K$, y está en el caso B). Sean los anillos circulares A_n del plano (u)

$$K^{2n} \leq |u| < K^{2(n+1)} \quad (-\infty < n < +\infty).$$

tajeados a los largo del semieje real positivo, y sea

$$W' = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{2n} \qquad W'' = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{2n+1}.$$

Se ve inmediatamente que si u pertenece a W' , $v = Ku$ y $v = u/K$ pertenecen a W'' . Sea ahora S_n la parte del anillo, del plano (x)

$$K^n \leq |x| < K^{n+1}$$

situada en el semiplano superior y S'_n la parte situada en el semiplano inferior. Los conjuntos X del caso B) pueden tomarse entonces de la siguiente manera,

$$X' = \sum S_{2n}, \quad X'' = \sum S_{2n+1}, \quad X''' = \sum S'_{2n}, \quad X'''' = \sum S'_{2n+1}.$$

Basta ahora definir

$$\begin{aligned} y &= Kx \text{ en } X' \text{ y } X''' \\ y &= -x/K \text{ en } X'' \text{ y } X'''' \end{aligned}$$

Esa función satisface a (2). Se ve, en este caso, que puede incluso ampliarse los recintos X suprimiendo el tajo a lo largo del eje real.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA,
MONTEVIDEO.

CRÓNICA

PRIMER COLOQUIO DE HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

Los días 18 y 20 de septiembre de 1945 se realizó en Buenos Aires, con el patrocinio de la *Unión Matemática Argentina* y la *Institución Cultural Española*, en la sede de esta última, el *Primer Coloquio de Historia y Filosofía de la Ciencia*. Se tuvo así el placer de ver reunidos a filósofos, físicos, matemáticos, químicos, etc., para tratar cuestiones científicas desde el punto de vista histórico-filosófico. El entusiasmo, la cordialidad, el número y la calidad de los asistentes contribuyeron al éxito completo de estas reuniones. De su im-

portancia, de sus posibles consecuencias, de su *necesidad* huelga hablar. La crítica del conocimiento es ineludible; el análisis epistemológico de los métodos científicos es tan valioso como la investigación misma de los hechos.

El tema central de estas discusiones fué "*El origen de las leyes científicas*", propuesto y tratado en primer término por el Dr. Julio Rey Pastor. Hecha la comparación entre el método aristotélico y el baconiano, examinó el método seguido por Arquímedes para llegar a la ley de la palanca, por Stevin para llegar a las leyes de la hidrostática y del plano inclinado, por Galileo en la caída de graves y por Huyghens para deducir la ley del péndulo compuesto. En todos estos casos y en otros muchos el método seguido, muy distinto del baconiano, se esquematiza así: observación o experimento-hipótesis-deducción lógica-comprobación experimental.

El Dr. Desiderio Papp hizo un documentado análisis del *origen y el significado de la mecánica newtoniana*. Es esencial aquí el procedimiento hipotético-deductivo, que el expositor considera como único método observando el Dr. Rey Pastor que en algunos casos no ha acontecido así. Análoga posición adopta el Dr. Mieli, que asiste a las sesiones y presenta una comunicación escrita.

El Dr. Carlos Prelat estudió la *ley de las proporciones definidas* y la *ley de las proporciones múltiples*. La primera equivale a una definición implícita del concepto de *substancia*; en la segunda interviene la *hipótesis atómica*.

El Dr. Heberto Puente se ocupó de las *leyes de la crioscopia, la tonometría y la presión osmótica*. Estas leyes también son el fruto de generalizaciones lógicas.

El Dr. Ernesto Sábato disertó sobre *leyes generales de la física*, especialmente las dos primeras leyes de la termodinámica.

Además del *origen de las leyes científicas*, fueron tratados otros temas. El Dr. Desiderio Papp habló de la *necesidad de introducir en la microfísica el concepto de tiempo discontinuo*, entablándose discusión en que intervinieron los doctores Würschmidt, Valentinuzzi, Sábato... El Dr. Hans Lindemann se ocupó de *conceptos de lógica moderna*, siendo impugnado por el Dr. Sábato. El Dr. Francisco Vera habló sobre la *publicación de obras científicas árabes medievales en lengua castellana*, proyecto que ya está en estudio por iniciativa del Dr. Rey Pastor.

El Dr. Pi Calleja expuso el estado de preparación de la *Enciclopedia Didáctica de Matemáticas Superiores*, patrocinada por la Institución cultural española.

Además de las personas ya mencionadas hallábanse entre los asistentes el Dr. José Würschmidt, de Tucumán, el Dr. Alejandro Terracini, de Tucumán, el Ing. Celestino Galli, delegado de la Universidad de Montevideo, el Ing. Luis A. Massera, también delegado de Montevideo, el bachiller Antonio Petraceca, de Montevideo, el Dr. Beppo Levi, de Rosario, el Dr. Sergio Sispánov, de Asunción, etc., etc. así como numerosos estudiantes de diversas facultades.

El martes 18 se realizó, en el Restaurant "Lo Prete", un amable almuerzo de camaradería.

M. Valentinuzzi

UNION MATEMATICA ARGENTINA

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Alejandro Terracini, Salta 417, Tucumán
Vicepresidentes, Agustín Durañona y Vedia. Alberto E. Sagastume Berra.
Secretarios, Máximo Valentínuzzi (Buenos Aires). Luis A. Santaló (Litoral).
Angel J. Guarnieri (Cuyo). Félix E. Herrera (Tucumán). Eduardo Zarantonello (La Plata). Ricardo Platzeck (Córdoba). Tesorera, Clotilde A. Bula.
Profesora, Yanny Frenkel de Cotlar.

REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay).
Dr. Sergio Sispánov. (Paraguay). Dr. Godofredo Gareía (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Peter Thullen (Ecuador).
Dr. Mario González (Cuba).

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5. — m/n. mensuales o de \$ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de \$ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Dr. MÁXIMO VALENTINUZZI

Gascón 520, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Para ingresar a la Asociación Física Argentina debe abonarse una cuota mensual de \$ 5.— m/n. Los estudiantes de física y de astronomía pagarán una cuota mensual de \$ 1.— m/n.

Presidente: Enrique Gaviola

Tesorera: Estrella Mazzolli de Mathov, Buenos Aires, San Juan 1931.

Secretarios Locales: Ernesto E. Galloni, Buenos Aires, Yermal 1763.

Fidel Alsina Fuertes, La Plata, calle 44, N° 717.

Guido Beck, Córdoba, Laprida 922.

José Würschmidt, Tucumán, Laprida 765.

S U M M A R I O

[illegible]

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPANHIA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO" (Villa Ocampo, F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G. BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUARTARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — CARLOS ISELLA (Rosario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).